

GEOMETRIE HYPERBOLIQUE

Prof. Léonard TODJIHOUNDE

Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP)

B.P. 613 Porto-Novo ; Benin.

leonardt@imsp-uac.org ; www.imsp-uac.org

1. Un peu de géométrie riemannienne

Métriques riemanniennes

Une forme différentielle quadratique q sur un ouvert U de \mathbb{R}^n est une application C^∞ de U dans l'espace vectoriel des formes quadratiques sur \mathbb{R}^n . Ainsi pour chaque $x \in U$, on a une forme quadratique q_x à coefficients C^∞ . Plutôt que d'écrire

$q_x(X) = \sum_{i \leq j} q_{ij} X^i X^j$, pour $X = (X^i, \dots, X^j) \in \mathbb{R}^n$, on écrira

$$q_x = \sum_{i \leq j} q_{ij} dx^i dx^j$$

en utilisant la notation différentielle $dx^i(X) = X^i$.

Une métrique riemannienne sur U est une forme différentielle quadratique g telle que g_x soit définie positive pour tout $x \in U$.

Ainsi $\sqrt{g_x}$ définit une norme qui dépend de x . La longueur d'une courbe C^1 par morceaux $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ est par définition

$$L(\gamma) := \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt,$$

avec $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}$.

On définit alors une distance sur U en posant, pour $P, Q \in U$,

$$d(P, Q) := \inf L(\gamma),$$

où la borne inférieure est considérée sur l'ensemble des courbes joignant P et Q .

Exercice : Montrer que d définit bien une distance et que la topologie associée à d est bien la topologie usuelle de U .

On appelle variété riemannienne (M, g) toute variété différentiable M munie d'une métrique riemannienne g .

Espaces Tangents

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , $p \in U$ et (x^1, \dots, x^n) un système de coordonnées sur U .

L'espace tangent à U au point p , noté $T_p U$, est l'espace vectoriel $\{p\} \times E$, où E est l'espace vectoriel de dimension n engendré par $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$, où $\frac{\partial}{\partial x^i}$ désigne la dérivée partielle au point p de la i -ème application composante.

Posons $TU = \bigcup_{p \in U} T_p U = U \times E$.

Ainsi $(p, v) \in TU \Leftrightarrow p \in U$ et $v \in T_p U$.

Soit $\pi : (p, v) \in TU \longrightarrow p \in U$.

Le couple (TU, π) est appelé fibré tangent à U ; TU et U sont resp. appelés les espaces total et de base du fibré tangent, et l'application π la projection canonique de l'espace total sur la base.

On appelle champ de vecteurs sur U ou section du fibré tangent, toute application $X : U \longrightarrow TU$ telle que, pour tout $p \in U$, $X_p = X(p) \in T_p U$. On note par abus $X \in TU$.

On définit la somme de deux champs de vecteurs et le produit d'un champ de vecteurs par une fonction (sur U) en posant :

$$(X + Y)(p) = X(p) + Y(p) \quad \text{et} \quad (\phi X)(p) = \phi(p)X(p).$$

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n , U' un ouvert de \mathbb{R}^m et $p \in U$.

A toute application $f : U \longrightarrow U'$, on associe une application linéaire, appelée application linéaire tangente de f au point p , $df(p) : T_p U \longrightarrow T_{f(p)} U'$, définie en coordonnées locales (x^i) sur U et (y^j) sur U' par :

$$df(p)(v) = \sum_{i,j} v^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad \text{où} \quad v = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

On peut donc associer à f l'application linéaire tangente $df : TU \longrightarrow TU'$ définie par :

$$df(p, v) := df(p)(v) \quad \text{ou encore} \quad df(X)(f(p)) := df(p)(X_p)$$

Soit $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ sur U (on note $\phi \in C^\infty(U)$) et X un champ de vecteurs sur U . On définit une action de X sur ϕ en posant

$$X\phi(p) = d\phi(p)(X_p), \quad \forall p \in U.$$

Cette action permet d'interpréter les champs de vecteurs comme des dérivations sur les fonctions C^∞ .

Crochet de Lie des champs de vecteurs

Soient X et Y deux champs de vecteurs sur U . on appelle le crochet de Lie de X et Y , noté $[X, Y]$, le champ de vecteurs défini pour toute fonction $\phi \in C^\infty(U)$ par

$$[X, Y](f) = X(Y(\phi)) - Y(X(\phi)) .$$

En coordonnées locales (x^i) sur U

$$[X, Y](f) = \sum_i \sum_j (X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}) \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

Remarque

- Si g est une métrique riemannienne sur U ; X et Y des champs de vecteurs sur U , on pose : $g(X, Y)(p) = g_p(X_p, Y_p)$.

En coordonnées locales (x^i) sur U , on a

$$g(X, Y)(p) = \sum_{i,j} g_{ij} X^i Y^j , \text{ avec } X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ et } Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} .$$

- La norme d'un champ de vecteurs X s'écrit

$$\|X\|(p) = \sqrt{g(X, X)(p)} .$$

- Si $f : M \longrightarrow N$ est une immersion entre les ouverts $U \subset \mathbb{R}^n$ et $U' \subset \mathbb{R}^m$, et si $g_{U'}$ est une métrique riemannienne sur U' , on définit une métrique riemannienne sur U , notée $f^*g_{U'}$, en posant

$$f^*g_{U'}(X, Y) = g_{U'}(df(X), df(Y)) .$$

Cette métrique est appelée métrique induite par f sur U .

Exemples

1. Le produit scalaire provenant de la distance euclidienne définit une métrique riemannienne sur \mathbb{R}^n .

2. Soit S^n la sphère unité de \mathbb{R}^{n+1} . Considérons l'application $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $f(x^1, \dots, x^{n+1}) = (\frac{x^1}{1-x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{1-x^{n+1}})$, pour $x^{n+1} \neq 1$.

L'application f est une immersion de S^n sur \mathbb{R}^n et induit sur S^n une métrique riemannienne g à partir de la métrique euclidienne sur \mathbb{R}^n , appelée métrique canonique sur S^n .

En coordonnées locales la métrique canonique sur S^n s'écrit :

$$g_{ij}(y) = \frac{4}{(1 + \|y\|^2)^2} \delta_{ij} ,$$

où $\|y\|$ désigne la norme euclidienne de y et δ_{ij} les symboles de Kronecker.

L'espace tangent en un point $x \in S^n$ est constitué par les vecteurs de \mathbb{R}^{n+1} qui sont orthogonaux (au sens usuel) à x .

Connexion de Levi-Civita

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . Une connexion sur U est un opérateur ∇ qui à deux champs de vecteurs X et Y sur U associe un troisième champ de vecteurs, noté $\nabla_X Y$, tel que

- $\nabla_{(\lambda X + \beta X')} Y = \lambda \nabla_X Y + \beta \nabla_{X'} Y$ avec λ et β des fonctions sur U .
- $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- $\nabla_X (\phi Y) = \phi \nabla_X Y + (d\phi(X))Y$, où ϕ est une fonction sur U (règle de Leibniz pour les dérivations).

Proposition

Soit g une métrique riemannienne sur U . Il existe une unique connexion ∇ sur U telle que

- ∇ est sans torsion : $T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$, $\forall X, Y \in TU$.
 - ∇ est compatible avec la métrique g :
- $$X.g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \forall X, Y, Z \in TU.$$

Cette unique connexion est appelée la connexion de Levi-Civita et est définie par la relation

$$(*) \quad 2g(\nabla_X Y, Z) = X.g(y, Z) + Y.g(X, Z) - Z.g(X, Y) \\ + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X)$$

Exercice : Montrer que la relation (*) définit bien une connexion sur U qui est sans torsion et compatible avec la métrique g .

Une connexion permet de comparer les vecteurs en deux points différents ; mais la comparaison dépend du chemin suivi ; d'où la notion de courbure que nous définirons plus loin.

Coefficients de Christoffel

Soient (x^i) un système de coordonnées sur U et ∇ une connexion sur U . Il existe des fonctions coefficients Γ_{ij}^k définies sur U telles que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \forall i, j.$$

Ces Γ_{ij}^k sont symétriques en i et j et sont appelées les coefficients de Christoffel de la connexion ∇ .

Si $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ sont deux champs de vecteurs sur U , alors

$$\nabla_X Y = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k X^i X^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Dans le cas où ∇ est la connexion de Levi-Civita déterminée par une métrique riemannienne g sur U , on a

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

Les coefficients de Christoffel déterminent entièrement la connexion.

Courbures

C'est une notion fondamentale en géométrie riemannienne.

Soient g une métrique riemannienne sur U , ∇ la connexion de Levi-Civita de g et X, Y, Z des champs de vecteurs sur U . On pose

$$R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z$$

En un point $x \in U$, la valeur de ce champ de vecteurs ne dépend que des valeurs des champs X, Y, Z en x .

Pour $X, Y, Z, W \in TU$, on pose

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$$

On définit ainsi un 4-tenseur sur TU appelé tenseur de courbure de Riemann. Il est antisymétrique en X, Y et en Z, W , et symétrique en (X, Y) et (Z, W) .

Soit $m \in U$. Si $X, Y \in T_m U$ sont linéairement indépendants, on définit la courbure sectionnelle du plan P déterminé par X et Y par

$$\sigma(X, Y) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - (g(X, Y))^2} .$$

La quantité $\sigma(X, Y)$ dépend seulement de P et non de la base de P choisie, et pourrait être notée $\sigma(P)$.

On appelle courbure sectionnelle de (U, g) , la fonction qui à tout plan $P \subset T_m U$ associe sa courbure sectionnelle $\sigma(P)$.

Il est clair que le tenseur de courbure détermine la courbure sectionnelle.

Réciproquement la courbure sectionnelle détermine aussi le tenseur de courbure.

Dans le cas où la courbure sectionnelle est constante et égale à k , on a la relation :

$$R(X, Y, Z, W) = k[g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z)] ,$$

la dépendance par rapport au point $m \in U$ étant toujours sous-entendue.

Exemples

- L'espace euclidien \mathbb{R}^n a une courbure sectionnelle nulle. On dit que c'est un espace plat (ou une variété plate) .

La sphère munie de la métrique canonique a une courbure sectionnelle constante et égale à 1.

Géodésiques

C'est une généralisation de la notion de droites.

Soit $\gamma : I \rightarrow U$ une courbe régulière sur U . Pour tout $t \in I$, $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}U$.

On dira qu'un champ de vecteurs $X \in TU$ est parallèle le long de la courbe γ , relativement à une connexion ∇ , si

$$\forall t \in I , \nabla_{\gamma'(t)} X(\gamma(t)) = 0 .$$

Et la courbe γ est appelée une géodésique sur U , relativement à la connexion ∇ , si

$$\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = 0 , \forall t \in I .$$

On traduit cette égalité en disant que γ est auto-parallèle.

Proposition

Soient $p \in U$ et $v \in T_p U$.

Il existe une unique géodésique $\gamma : \mathbb{R}_+ \longrightarrow U$ telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = v$.

Preuve : Théorème de Cauchy-Lipschitz.

Si ∇ est la connexion de Levi-Civita, alors les équations des géodésiques s'écrivent en coordonnées locales

$$\ddot{\gamma}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t) = 0, \quad \forall t \in I \text{ et } \forall k = 1, \dots, n,$$

où $\gamma : I \longrightarrow U$ est une courbe régulière sur U . Les notations $\dot{\gamma}$ et $\ddot{\gamma}$ désignent les dérivées premières et secondes de γ par rapport à t .

Les géodésiques sont en fait les points critiques de la fonctionnelle qui à toute courbe associe sa longueur. Ainsi toutes les courbes minimisant cette fonctionnelle sont des géodésiques.

Exemples

- Les géodésiques de l'espace euclidien \mathbb{R}^n sont les droites.
- Les géodésiques de la sphère canonique sont les grands cercles.

2. Géométrie hyperbolique plane

On appelle géométrie hyperbolique une géométrie dans laquelle on a remplacé l'axiome d'Euclide par un autre axiome : l'existence de plusieurs droites passant par un point extérieur à une autre droite donnée et ne coupant pas celle-ci.

Nous étudierons dans ce qui suit quelques modèles de plan hyperbolique.

La pseudo-sphère (modèle de Minkowski)

La pseudo-sphère est la surface

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - z^2 = -1, z > 0\},$$

munie de la métrique induite par la forme quadratique

$$dx^2 + dy^2 - dz^2.$$

Les géodésiques sont les traces des deux-plans passant par l'origine.

Le groupe d'isométries est le sous-groupe de $Gl(3, \mathbb{R})$ formé des matrices $M = (m_{ij})$ telles que

$$M^T Q M = M, \text{ et } m_{33} > 0,$$

où $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

En effet préserver la pseudo-sphère, c'est envoyer le vecteur $(0, 0, 1)$ sur un vecteur dont la troisième composante est positive.

Demi-plan de Poincaré

Le demi-plan de Poincaré est la partie

$$\mathbb{H}^2 := \{z = x + iy \in \mathbb{C} / y > 0\} \text{ de } \mathbb{C},$$

munie de la métrique g , donnée par la forme quadratique

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Toute courbe C^1 par morceaux $\gamma : t \in [\alpha, \beta] \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{H}^2$ a pour longueur

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt$$

La distance de deux points $P, Q \in \mathbb{H}^2$ est la borne inférieure des longueurs des courbes joignant P et Q .

Géodésiques de \mathbb{H}^2

1. Les droites (les segments verticaux) sont des géodésiques de \mathbb{H}^2 .

Considérons deux points distinctes $A = a + iy_0$ et $B = a + iy_1$ de \mathbb{H}^2 et le chemin $\gamma : [y_0, y_1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ tel que $\gamma(t) = (a, t)$ (on suppose par exemple $y_0 < y_1$). Alors

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{y} = \ln \left| \frac{y_1}{y_0} \right|.$$

Si $c : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{H}^2$ telle que $c(t) = (x(t), y(t))$, est une autre courbe joignant A et B , on a

$$L(c) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \geq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \geq \ln \left| \frac{y_1}{y_0} \right|.$$

On en déduit que

$$d(A, B) = \ln \left| \frac{y_1}{y_0} \right|.$$

En conclusion les droites verticales $t \in \mathbb{R} \mapsto (x_0, y_0 e^t)$ sont des géodésiques de \mathbb{H}^2 .

Pour trouver d'autres géodésiques de \mathbb{H}^2 , on va s'intéresser à certaines isométries de \mathbb{H}^2 .

Il est immédiat de voir que les transformations $z \mapsto z + h$; $z \mapsto -\bar{z}$; $z \mapsto \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, conservent les longueurs des courbes et sont donc des isométries de \mathbb{H}^2 .

- L'inversion $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ est une isométrie de \mathbb{H}^2 .

En effet si $(X, Y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$, on a

$$dX = \frac{dx}{x^2+y^2} - \frac{2x(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)^2} \text{ et } dY = \frac{dy}{x^2+y^2} - \frac{2y(xdx+ydy)}{(x^2+y^2)^2}.$$

On a donc bien

$$\frac{dX^2 + dY^2}{Y^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

- Plus généralement toute inversion de module positif et de pôle situé sur l'axe réel est une isométrie de \mathbb{H}^2 .

En effet soit $z \mapsto r^2 \times \frac{1}{\bar{z}-a} + a$ l'inversion de centre $a \in \mathbb{R}$, et de rayon r . Si on l'identifie à $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$, on a

$$u(x, y) = a + r^2 \frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} \text{ et } v(x, y) = r^2 \frac{y}{(x-a)^2 + y^2}.$$

Un calcul direct permet de montrer que

$$\frac{du^2 + dv^2}{v^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Il en résulte que les intersections avec \mathbb{H}^2 des cercles centrés sur l'axe réel (c'est-à-dire les droites hyperboliques) sont des géodésiques de \mathbb{H}^2 , et que par deux de \mathbb{H}^2 il passe une unique géodésique.

En effet soient deux points P et Q de \mathbb{H}^2 . Ils sont reliés par une unique droite hyperbolique. Supposons qu'il y ait une autre géodésique de P à Q . On peut envoyer la droite (PQ) sur une droite verticale (inversion dans un cercle tangent, de rayon double), et on a alors une géodésique entre les points images P' et Q' qui n'est pas la droite verticale; ce qui n'est pas possible.

On peut donc énoncer :

Théorème

Les géodésiques de \mathbb{H}^2 sont les droites hyperboliques.

Dans la suite nous appellerons réflexions du demi-plan de Poincaré les inversions de module positif et de pôle situé sur l'axe réel, ainsi que les symétries euclidiennes par rapport aux droites orthogonales à l'axe réel, restreintes à \mathbb{H}^2 .

Ces transformations ont les propriétés suivantes :

- Ce sont des isométries de \mathbb{H}^2 , dont l'ensemble des points fixes est une géodésique.
- Quels que soient P et Q distincts dans \mathbb{H}^2 , il existe une unique réflexions les échangeant.

Dans ces conditions :

- L'ensemble des points équidistants de deux points distincts P et Q de \mathbb{H}^2 est une géodésique : c'est l'ensemble des points fixes de l'unique réflexion qui échange P et Q .
- Si une isométrie a trois points fixes non alignés, c'est l'identité.
- Toute isométrie \mathbb{H}^2 est produit de une, deux ou trois réflexions.

Isométries de \mathbb{H}^2

Les isométries de \mathbb{H}^2 sont des difféomorphismes. On dira qu'une isométrie est directe si son jacobien est positif, inverse si son jacobien est négatif. Comme dans le cas euclidien et sphérique, une isométrie qui à deux points fixes distincts est l'identité, et par conséquent, une isométrie directe est produit de deux réflexions.

Proposition

Les isométries directes de \mathbb{H}^2 sont les homographies

$$T : z \mapsto T(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ avec } ad - bc > 0.$$

Preuve

La relation $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}$ montre que :

- a) la partie imaginaire de $T(z)$ est égale au produit du complexe $\frac{ad-bc}{|cz+d|^2}$ par la partie imaginaire de z .

Il en résulte que $T(\mathbb{H}^2) \subset \mathbb{H}^2$ et comme T^{-1} est du même type que T , $T(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$.

b) T est composée d'isométries.

D'autre part, T est holomorphe et $T'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ est partout non nul ; donc son jacobien est positif.

Réciproquement, un calcul direct montre que le produit de deux réflexions est bien de cette forme.

Remarque

Quitte à multiplier a, b, c, d par un même réel convenable, on peut se ramener au cas où $ad - bc = 1$.

En ce qui concerne les isométries inverses, on a :

Proposition

Les isométries inverses de \mathbb{H}^2 sont les homographies de la forme

$$T : z \mapsto T(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ avec } ad - bc = -1.$$

Preuve : exercice.

Points à l'infini ; classification des isométries

On appelle point à l'infini du demi-plan de Poincaré les points de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Une géodésique de \mathbb{H}^2 , prolongée aux points infinis, admet deux points à l'infini, et inversement deux points distincts de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sont les points à l'infini d'une géodésique.

On a la classification suivante des isométries :

Proposition

Soit $T : z \mapsto T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $ad - bc = 1$. Alors

- Ou bien T admet deux points fixes à l'infini (cas où $|a + d| > 2$), et T est conjuguée à une homothétie $z \mapsto \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

T est alors dite hyperbolique.

La géodésique définie par les points fixes est globalement invariante, et la restriction de T à cette géodésique (qui est un espace métrique isométrique à \mathbb{R}) est une translation L'espace hyperbolique de dimension n de longueur $|\ln \lambda|$.

- Ou bien T admet un point fixe à l'infini (cas où $|a + d| = 2$), et T est conjuguée à une translation $z \mapsto z + h$, $h \in \mathbb{R}$.

On dit dans ce cas que T est parabolique.

- Ou bien T admet un point fixe dans \mathbb{H}^2 (cas où $|a + d| < 2$).

On dit alors que T est elliptique.

Preuve : exercice.

Le disque de Poincaré

L'homographie $h : z \mapsto h(z) = \frac{z-i}{z+i}$ définit un homéomorphisme du demi-plan de Poincaré \mathbb{H}^2 sur le disque unité $D^2 = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$.

Les points à l'infini de \mathbb{H}^2 sont envoyés sur le cercle unité.

On transporte à D^2 la métrique de \mathbb{H}^2 en posant

$$dist_{D^2}(p, q) = dist_{\mathbb{H}^2}(h^{-1}(p), h^{-1}(q))$$

Si $(h^{-1}(x, y) = (X, Y))$, on obtient en remplaçant X et Y en fonction de x et y dans l'expression $g = \frac{dX^2 + dY^2}{Y^2}$, que la métrique sur D^2 est donnée par

$$ds^2 = 4 \frac{dx^2 + dy^2}{1 - x^2 - y^2} = 4 \frac{dx^2 + dy^2}{1 - \|X\|^2}, \text{ avec } X = (x, y).$$

On appelle disque de Poincaré le disque D^2 muni de la métrique ci-dessus définie.

Les géodésiques de D^2 sont les images par l'homographie h de celles de \mathbb{H}^2 : ce sont les arcs de cercles rencontrant le cercle unité orthogonalement, ainsi que les diamètres du cercle unité.

Les points à l'infini du disque de Poincaré sont les points du cercle unité.

On a la même classification des isométries directes en elliptiques, hyperboliques et paraboliques.

Les restrictions à D^2 des rotations euclidiennes de centre O sont des isométries de D^2 . Réciproquement, toute isométrie de D^2 fixant O est une rotation.

Par conséquent :

Toute isométrie elliptique du disque de Poincaré est conjuguée à une isométrie de la forme $z \mapsto e^{i\alpha} z$.

Aussi bien dans le cas du demi-plan ou du disque de Poincaré, la distance a l'expression explicite suivante :

Proposition

Soient p et q deux points distincts de D^2 ou de \mathbb{H}^2 , et soient α et β les points à l'infini de la géodésique passant par p et q . Alors

$$d(p, q) = \ln |[a, b, \alpha, \beta]|$$

Preuve : on se ramène au cas de deux points de \mathbb{H}^2 situés sur une géodésique qui est une demi-droite verticale, et on utilise l'invariance du birraport par homographie.

Exemple

Si p est un point du disque situé à la distance euclidienne r de l'origine O ,

$$d(O, p) = \ln \frac{1+r}{1-r} .$$

Circonférence d'un cercle ; aire d'un disque

Soit \mathcal{C} un cercle hyperbolique de rayon R , centré par exemple en i . Dans le modèle de Poincaré, c'est un cercle euclidien de rayon r et de centre O , avec $r = \frac{e^R - 1}{e^R + 1}$. On a une paramétrisation de \mathcal{C} dans D^2 :

$x = r \cos \theta$; $y = r \sin \theta$. Par suite $ds = \frac{2r}{1-r^2} d\theta$.

La circonférence de \mathcal{C} est alors donnée par :

$$L = \int_0^{2\pi} \frac{2r}{1-r^2} d\theta = 4\pi \frac{r}{1-r^2} = 2\pi \sinh(R) .$$

L'aire A du disque délimité par \mathcal{C} est donnée par

$$A = \int_0^R 2\pi \sinh(x) dx = 4\pi \sinh\left(\frac{R}{2}\right).$$

L'espace hyperbolique de dimension n

Le triangle hyperbolique

Formule fondamentale de la trigonométrie hyperbolique :

Soit (A, B, C) un triangle un triangle hyperbolique avec un angle θ en a . Notons a, b, c les longueurs des AB, BC et AC resp. Alors :

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \theta .$$

Preuve

On se place dans le modèle de l'hyperboloïde. Soient U et V les vecteurs unitaires en A , dans la direction de B et C resp. Alors

$$B = \cosh(c)A + \sinh(c)U, \quad C = \cosh(b)A + \sinh(b)V \text{ et } \cos \theta = \langle U, V \rangle .$$

Le résultat provient du fait que : $\cosh(a) = \langle B, C \rangle$.

On appelle triangle idéal, un triangle dont tous les sommets sont à l'infini ($\bar{\mathbb{R}}$ dans le demi-plan supérieur).

Lemme 1

Tous les triangles idéaux sont congruents et ont pour aire π .

Preuve

Tout triangle idéal peut être transformé par isométrie en un triangle de sommets $(-1, 0); (1, 0)$ et ∞ .

Si les trois sommets d'un triangle idéal sont sur \mathbb{R} , on le transforme, par une inversion dans un cercle de centre l'un de ces sommets, en un triangle idéal ayant pour ∞ sommet. Par une translation horizontale suivie d'une homothétie de centre $(0, 0)$ on le transforme en un triangle ayant pour sommets $(-1, 0); (1, 0)$ et ∞ . Tous les triangles idéaux sont donc congruents.

Le domaine D délimité par ce triangle est
 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq x \leq 1 ; \sqrt{1-x^2} \leq y\}$.

La différentielle d'aire est donnée dans \mathbb{H}^2 par

$$da = \frac{1}{y^2} dx dy$$

L'aire du triangle est alors

$$A = \int \int_D da \int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dx dy = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

En posant $x = \sin \theta$, on obtient

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi .$$

On appelle triangle à deux tiers idéal, un triangle pour lequel au moins deux sommets sont à l'infini. Le sommet ne se trouvant pas à l'infini est alors appelé sommet réel.

Lemme 2

Deux triangles à deux tiers idéaux sont congruents si et seulement si ils ont même angle intérieur en leur sommet réel.

Preuve : exercice.

Lemme 3

Considérons un triangle à deux tiers idéal ayant pour angle $\pi - \theta$ ($\theta \in [0, \pi]$). Soit \mathcal{A} l'application qui à un tel triangle associe son aire $\mathcal{A}(\theta)$. Alors

$$\mathcal{A}(\theta) = \theta$$

Preuve : exercice.

Formule de Gauss-Bonnet :

Soit (A, B, C) un triangle hyperbolique dont les angles aux sommets sont α, β, γ . Alors son aire est

$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma) .$$

Preuve :

On considère un (vrai) triangle (A, B, C) dans le modèle de Poincaré. On se donne trois points à l'infini A', B', C' en prolongeant les côtés sur le cercle unité (voir figure). Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(ABC) &= \mathcal{A}(A'B'C') - \mathcal{A}(A'AC') - \mathcal{A}(C'CB') - \mathcal{A}(B'BA') \\ &= \pi - \mathcal{A}(\alpha) - \mathcal{A}(\beta) - \mathcal{A}(\gamma) \\ &= \pi - (\alpha + \beta + \gamma) . \end{aligned}$$

Corollaire

L'aire d'un polygone à n côtés est égale à :

$$(n - 2)\pi - \sum \text{angles} .$$

3. L'espace hyperbolique de dimension n

L'espace hyperbolique de dimension n est le sous-espace

$\mathbb{H}^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = -1, x_0 > 0\}$ de \mathbb{R}^{n+1} , muni de la métrique g induite par la forme quadratique

$$-dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2.$$

La condition $x_0 > 0$ assure que \mathbb{H}^n est connexe.

Si $p \in \mathbb{H}^n$, l'espace tangent $T_p\mathbb{H}^n$ peut être identifié au sous-espace vectoriel g -orthogonal à p .

Nous donnons en utilisant des difféomorphismes appropriés d'autres présentations de l'espace hyperbolique.

Soit f la pseudo-inversion de pôle $s = (-1, 0, \dots, 0)$ définie par

$$f(x) = s - \frac{(x - s)}{g(x - s, x - s)}.$$

Cette pseudo-inversion f est un difféomorphisme de \mathbb{H}^n sur le disque unité $\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \|x\| < 1\}$, où $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

La métrique g_1 induite (de g) par ce difféomorphisme sur le disque unité, est donnée par

$$g_1 = (f^{-1})^*g = 4 \sum_{i=1}^n \frac{dx_i^2}{(1 - \|x\|^2)^2}.$$

De même l'inversion de \mathbb{R}^n de pôle $t = (-1, 0, \dots, 0)$ donnée par

$$\phi(x) = t + \frac{2(x - t)}{\|x - t\|^2}$$

définit un difféomorphisme du disque unité sur le demi-espace

$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 > 0\}$.

La métrique g_2 induite (de g_1) par ce difféomorphisme sur le demi-espace, est donnée par

$$g_2 = (\phi^{-1})^*g_1 = \sum_{i=1}^n \frac{dx_i^2}{x_i^2}.$$

Caractérisation géométrique : l'espace hyperbolique a une courbure sectionnelle constante et égale à -1.

Bibliographie

- [1] J. W. Anderson, *hyperbolic geometry*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2. Ed., 2005.
- [2] M. Berger, *Géométrie*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1994.
- [3] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2. Ed. 1993.
- [4] J. Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 4. ed. 2005.
- [5] S. Stahl, *The Poincaré half-plane*, Jones and Bartlett, 1993.
- [6] G. Walschap, *metric structures in differential geometry*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg