

GEOMETRIE PROJECTIVE

Prof. Léonard TODJIHOUNDE

Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP)

B.P. 613 Porto-Novo ; Benin.

leonardt@imsp-uac.org ; www.imsp-uac.org

1. Espaces Projectifs

Un espace projectif est l'ensemble des droites vectorielles d'un espace vectoriel ; on peut imaginer la vue d'un observateur placé sur l'origine d'un espace vectoriel, et chaque élément de l'espace projectif correspond à une direction de son regard.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel (\mathbb{K} est un corps, en général \mathbb{R} ou \mathbb{C}).

Considérons sur $E - \{0\}$ la relation de colinéarité (qui est une relation d'équivalence) : " $U \sim V \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^* , V = \lambda U$ ". L'espace projectif $P(E)$ déduit de E est l'ensemble des classes d'équivalence de $E - \{0\}$ relativement à cette relation.

Si E est de dimension finie n , on convient que la dimension de $P(E)$ est $(n - 1)$.

Cas particuliers :

- Si $E = \{0\}$ alors $P(E) = \Phi$.

- Si $\dim E = 1$, alors $P(E)$ est réduit à un seul point.

- Si $\dim E = 2$, alors $P(E)$ est une droite ($\dim P(E) = 1$) appelée droite projective.

- Si $\dim E = 3$, alors $P(E)$ est un plan ($\dim P(E) = 2$) appelé plan projectif.

- Si E est l'espace vectoriel "typique", c'est-à-dire \mathbb{K}^{n+1} , alors $P(\mathbb{K}^{n+1})$ est noté $P_n(\mathbb{K})$ et on a $P_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n+1} - \{0\} / \mathbb{K}^*$.

Dans toute la suite on suppose E de dimension finie.

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , E est un espace topologique.

On munit $P(E)$ de la topologie quotient rendant la projection canonique $\pi : E - \{0\} \longrightarrow P(E)$ continue et ouvert.

Notons $S(E)$ la sphère unité de E . La restriction sur $S(E)$ de la relation de colinéarité se traduit par : " $U \sim V \iff V = U$ ou $v = -U$ " et l'espace projectif $P(E)$ peut encore se réaliser comme l'image de $S(E)$ par la projection canonique. On a les résultats suivants :

Proposition 1 :

Les espaces projectifs réels ou complexes de dimension finie sont des espaces topologiques compacts et connexes par arcs.

Preuve : Cas réel.

E est muni d'une structure euclidienne.

$P(E)$ est compact.

En effet soient D et D' deux points distincts de $P(E)$ (c'est-à-dire que D et D' sont deux droites vectorielles distinctes de E) et $v \in D$ et $v' \in D'$ des vecteurs unitaires. Puisque $S(E)$ est séparé, il existe des ouverts U et V sur $S(E)$ tels que $u \in U$, $v \in V$ et $U, V, -U, -V$ sont disjoints.

Alors $\pi(U)$ et $\pi(V)$ sont des ouverts de $P(E)$, car la projection est ouverte. $D \in \pi(U)$, $D' \in \pi(V)$ et $\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$. D'où $P(E)$ est séparé.

Aussi $S(E)$ est compact (car fermée et borné dans un espace de dimension finie) et $P(E) = \pi(S(E))$ avec π continue.

Par conséquent $P(E)$ est compact, car séparé et image continue d'un compact.

$P(E)$ est connexe par arcs.

Si $\dim E \geq 2$, alors $\overline{S(E)}$ est connexe par arcs. Il s'en suit que $P(E)$ est connexe par arcs comme image continue d'un connexe par arcs.

Si $\dim E = 1$, alors $P(E)$ est réduit à un point et est donc connexe par arcs.

Exercice : examiner le cas complexe.

Proposition 2 :

La droite projective $P^1(\mathbb{R})$ est homéomorphe à la sphère S^1 de \mathbb{R}^2 et la droite projective $P^1(\mathbb{C})$ est homéomorphe à la sphère S^2 de $\mathbb{R}^3 \approx \mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

Ces homéomorphismes peuvent être explicités de plusieurs façons. Par exemple, on obtient un homéomorphisme de $P^1(\mathbb{R})$ sur S^1 , vu comme l'ensemble des nombres complexes de module 1, en faisant passer au quotient l'application $z \mapsto z^2$.

Dans le cas complexe on remarque que

$$S^2 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} / z^2 + t^2 = 1\}$$

et on définit une application f de S^2 dans $P^1(\mathbb{C})$ en posant

$$f(z, t) = \begin{cases} \pi(z, 1-t) & \text{si } t \neq 1 \\ \pi(1+t, \bar{z}) & \text{si } t \neq -1 \end{cases},$$

et on montre que f est un homéomorphisme. L'homéomorphisme réciproque est obtenu par passage au quotient de l'application

$$H : (u, v) \in \mathbb{C}^2 - \{0\} \mapsto \left(\frac{2u\bar{v}}{|u|^2 + |v|^2}, \frac{|u|^2 - |v|^2}{|u|^2 + |v|^2} \right).$$

La définition de f est motivée par les formules donnant les projections stéréographiques de pôle Nord et Sud de S^2 dans \mathbb{C} , données par :

$$i_N(z, t) = \frac{z}{1-t} \quad \text{et} \quad i_S(s, t) = \frac{z}{1+t}.$$

On appelle complété projectif de E , l'espace projectif défini par $E \oplus \mathbb{K}$.

2. Eléments à l'infini

Soit \mathcal{F} un espace affine de dimension n dans lequel on fixe une origine O , $E = \mathcal{F} \times \mathbb{K}$ et $F = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E / x_{n+1} = 0\}$ l'hyperplan d'équation $x_{n+1} = 0$. Identifions \mathcal{F} à $\mathcal{F} \times \{1\}$, c'est-à-dire qu'on identifie \mathcal{F} à l'hyperplan d'équation $x_{n+1} = 1$.

Puisque chaque droite vectorielle de E qui n'est pas contenue dans F rencontre \mathcal{F} en un unique point, on a une bijection entre $P(E) - P(F)$ et \mathcal{F} .

Il s'en suit que $P(E) \approx \mathcal{F} \cup P(F)$.

$P(F)$ est appelé l'hyperplan à l'infini de \mathcal{F} . Il n'est pas dans \mathcal{F} et est constitué des directions de \mathcal{F} .

Cas Particuliers

Points à l'infini :

Soient E un plan vectoriel, $P(E)$ la droite projective associée et (e_1, e_2) une base de E . Toutes les droites de E ont un unique vecteur directeur de coordonnées $(x, 1)$, sauf l'axe des abscisses d'équation $y = 0$. Cela revient à dire que toutes les droites vectorielles de E rencontrent la droite affine Δ d'équation $y = 1$, sauf l'axe des abscisses Ox .

Posons $m = \pi(Ox)$. On a alors

$$\Delta \approx P(E) - \{m\}, \text{ soit : } P(E) = \Delta \cup \{m\}.$$

Le point $m = \pi(Ox)$ est appelé point à l'infini de la droite projective $P(E)$.

Droite à l'infini :

Soient E un espace vectoriel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E , F le plan vectoriel d'équation $z = 0$ et \mathcal{F} le plan affine (de direction F) d'équation $z = 1$. Une droite vectorielle D de E rencontre \mathcal{F} en un unique point, sauf si elle est contenue dans F , auquel cas elle ne rencontre pas \mathcal{F} . On a donc $P(E) - P(F) \approx \mathcal{F}$; soit $P(E) \approx \mathcal{F} \cup P(F)$.

$P(F)$ s'appelle droite à l'infini du plan projectif $P(E)$.

En coordonnées les points $(x, y, 1)$ sont les points propres, c'est-à-dire ceux de \mathcal{F} et les points $(x, y, 0)$ sont les points impropres, c'est-à-dire les points à l'infini.

L'espace projectif (de dimension n) peut donc être considéré comme un espace affine (de dimension n) auquel on adjoint l'ensemble de ses directions. La géométrie projective est donc la géométrie sans parallèles : deux droites seront nécessairement sécantes soit en un point propre (lorsqu'elles sont affinement sécantes), soit en un point impropre (lorsqu'elles sont affinement parallèles).

Applications : versions projectives des théorèmes de Pappus et de Desargues.

3. Sous-espaces projectifs

Une partie V de $P(E)$ est appelé un sous-espace projectif si elle est l'image par la projection d'un sous-espace non nul F de E ; c'est-à-dire l'ensemble des droites vectorielles contenues dans F .

En particulier, on appellera hyperplan projectif tout sous-espace projectif défini à partir d'un hyperplan vectoriel.

Pour toute partie A de $P(E)$, on peut définir le sous-espace projectif engendré par A , comme le plus petit sous-espace projectif de $P(E)$ contenant A ; on le notera $Proj(A)$. Il correspond au sous-espace vectoriel engendré par $\pi^{-1}(A)$.

Propriétés

a) Soient H un hyperplan projectif de $P(E)$ et m un point de $P(E)$ n'appartenant pas à H . Alors toute droite passant par m coupe H en un point et un seul.

b) Si $\pi(F)$ et $\pi(G)$ sont deux sous-espaces projectifs de $P(E)$, l'intersection $\pi(F) \cap \pi(G)$ est un sous-espace projectif correspondant au sous-espace vectoriel $F \cap G$: $\pi(F) \cap \pi(G) = \pi(F \cap G)$.

c) $\pi(F) \cup \pi(G)$ n'est pas en général un sous-espace projectif, mais le sous-espace projectif engendré par $\pi(F) \cup \pi(G)$ correspond au sous-espace vectoriel $F + G$: $Proj(\pi(F) \cup \pi(G)) = \pi(F + G)$.

d) $\dim \pi(F) + \dim \pi(G) = \dim \pi(F + G) - \dim \pi(F \cap G)$;
et si $\dim \pi(F) + \dim \pi(G) \geq \dim P(E)$, alors $\pi(F) \cap \pi(G) \neq \Phi$.

En particulier deux droites projectives d'un plan projectif ont toujours au moins un point en commun, le point à l'infini.

Autrement dit il n'y a pas de droites parallèles dans un plan projectif, et plus généralement pas de notion de parallélisme en géométrie projective. D'où l'avantage de la géométrie projective par rapport à la géométrie affine : elle va nous permettre d'éliminer de nombreux cas particuliers dûs au parallélisme.

Preuve :

a) Soit F un hyperplan de E tel que $H = \pi(F)$ et D la droite vectorielle de E telle que $m = \pi(D)$.

$m \notin H \Leftrightarrow D \not\subset F$.

Soit P un plan de E contenant D . On a $P + F = E$.

Alors $\dim P \cap F = \dim P + \dim F - \dim(P + F) = 1$.

Par conséquent $\pi(P) \cap H$ est réduit à un seul point.

Les propriétés b) et c) s'obtiennent assez facilement.

d) Soient $V = \pi(F)$ et $W = \pi(G)$.

$\dim V + \dim W \geq \dim P(E) \Leftrightarrow (\dim F - 1) + (\dim G - 1) \geq \dim E - 1$.

Soit : $\dim F + \dim G \geq \dim E + 1$ (*).

Il résulte de (*) que $\dim F \cap G \geq 1$ car

$\dim F + \dim G = \dim(F + G) + \dim(F \cap G)$. Par conséquent $V \cap W \neq \Phi$.

4. Coordonnées homogènes

Les coordonnées homogènes, introduite par August Ferdinand Möbius, rendent les calculs dans l'espace projectif possible comme dans les coordonnées cartésiennes le font dans l'espace euclidien. Les coordonnées homogènes sont largement utilisées en infographie et plus particulièrement pour la représentation de scènes en 3D et elles permettent de caractériser les transformations de l'espace. La notation sous forme matricielle est plus particulièrement utilisée dans les bibliothèques de programmation graphique 3D telles que OpenGL et Direct 3D.

Soient E un espace vectoriel de dimension $n + 1$ et (e_1, \dots, e_{n+1}) une base de E . Tout vecteur de E peut se décrire par ses coordonnées (x_1, \dots, x_{n+1}) dans cette base. Un point m de $P(E)$ peut aussi être décrit par les coordonnées d'un vecteur non nul x qui engendre la droite m dans E . Deux $(n + 1)$ -uplets (x_1, \dots, x_{n+1}) et (x'_1, \dots, x'_{n+1}) représentent le même point m de $P(E)$ si et seulement s'il existe un scalaire non nul λ tel que $x'_i = \lambda x_i$, $\forall i = 1, \dots, n+1$. On appelle coordonnées homogènes du point m , la classe d'équivalence de (x_1, \dots, x_{n+1}) que l'on note $[x_1, \dots, x_{n+1}]$.

Parmi tous les représentants de cette classe, il arrive que l'on en privilégie une pour retrouver un espace affine de dimension n ; celui dont la dernière coordonnée, par exemple, vaut 1. Cela revient à dire que l'on a projeté l'espace dans l'hyperplan d'équation $x_{n+1} = 1$.

Si (x_1, \dots, x_{n+1}) est un système de coordonnées, on privilégie le système $(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1)$. Cela ne vaut évidemment que si m est un point propre. Les points impropres sont représentés par des systèmes de coordonnées homogènes dont la dernière composante est nulle.

On remarque bien la correspondance entre

- les points propres de $P(E)$ et les points d'un espace affine de dimension n .
- les points impropres de $P(E)$ et les directions d'un espace vectoriel de dimension n .

Choisir de mettre arbitrairement une composante égale à 1 dans les coordonnées homogènes permet de définir des cartes différentes.

Combinaisons linéaires de vecteurs

Soient A et B deux points d'un espace projectif de dimension 3, de coordonnées homogènes :

$A : (X_A, Y_A, Z_A, W_A)$ et $B : (X_B, Y_B, Z_B, W_B)$.

On voudrait trouver leur combinaison linéaire $\alpha A + \beta B$, où α et β sont des scalaires. On peut avoir l'une des situations suivantes :

- A et B sont des points propres ($W_A \neq 0$ et $W_B \neq 0$). Dans ce cas

$$\alpha A + \beta B = \left(\alpha \frac{X_A}{W_A} + \beta \frac{X_B}{W_B}, \alpha \frac{Y_A}{W_A} + \beta \frac{Y_B}{W_B}, \alpha \frac{Z_A}{W_A} + \beta \frac{Z_B}{W_B}, 1 \right).$$

- A et B sont des points impropres ($W_A = W_B = 0$). Dans ce cas

$$\alpha A + \beta B = (\alpha X_A + \beta X_B, \alpha Y_A + \beta Y_B, \alpha Z_A + \beta Z_B, 0).$$

- A est un point propre et B un point impropre ($W_A \neq 0$ et $W_B = 0$). Alors

$$\alpha A + \beta B = (\beta X_B, \beta Y_B, \beta Z_B, 0).$$

Cela signifie qu'un point à l'infini est dominant. En théorie des ensembles on dit que c'est un élément absorbant.

Notation matricielle

Un point de l'espace peut être, si $W = 1$, désigné par ses coordonnées homogènes en 3D sous la forme $(X, Y, Z, 1)$. Les coordonnées homogènes sont alors utilisées pour appliquer des transformations à un point 3D telles que les changements de repères, les rotations, les translations, les homothéties, les projections, ainsi que les compositions de ces différents opérateurs de base. Ces transformations sont alors représentées sous la forme d'une matrice 4×4 .

Les translations

La matrice traduisant une translation dans l'espace écrite sous la forme

$$(t_x, t_y, t_z) \text{ est sous la forme } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soient deux points, appelés origine O et extrémité E , de coordonnées homogènes (X_o, Y_o, Z_o, W_o) et (X_e, Y_e, Z_e, W_e) , les W n'étant pas nuls puisque les points sont affines. Alors le "vrai vecteur" du plan affine qui permet de

se translater du point O au point E a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} \frac{X_e}{W_e} - \frac{X_o}{W_o} \\ \frac{Y_e}{W_e} - \frac{Y_o}{W_o} \\ \frac{Z_e}{W_e} - \frac{Z_o}{W_o} \end{pmatrix}$.

La relation de Chasles est d'une lecture immédiate sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \frac{X_b}{W_b} & - & \frac{X_a}{W_a} \\ \frac{Y_b}{W_b} & - & \frac{Y_a}{W_a} \\ \frac{Z_b}{W_b} & - & \frac{Z_a}{W_a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{X_c}{W_c} & - & \frac{X_b}{W_b} \\ \frac{Y_c}{W_c} & - & \frac{Y_b}{W_b} \\ \frac{Z_c}{W_c} & - & \frac{Z_b}{W_b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{X_c}{W_c} & - & \frac{X_a}{W_a} \\ \frac{Y_c}{W_c} & - & \frac{Y_a}{W_a} \\ \frac{Z_c}{W_c} & - & \frac{Z_a}{W_a} \end{pmatrix} .$$

Avec cette notation, si l'on considère quatre points A, B, C et D , la commutativité de l'addition des vecteurs et le théorème de croisement des équipollences sont immédiats.

Les rotations

Une représentation dans l'espace peut être aussi notée sous forme matricielle.

L'opérateur sera de la forme $\begin{pmatrix} R_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} \\ O_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix}$.

Si l'on prend un repère de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, nous obtenons les rotations suivantes autour des axes principaux :

$$\text{Rotation d'angle } \alpha \text{ autour de } \vec{i} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rotation d'angle } \beta \text{ autour de } \vec{j} : \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rotation d'angle } \gamma \text{ autour de } \vec{k} : \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les homothéties

Une homothétie sera représentée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} h_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si les facteurs d'échelle h_x , h_y et h_z sont égaux, alors il s'agit d'une homothétie au sens strict du terme. Cette formalisation permet d'appliquer différents facteurs d'échelle suivant différentes directions de l'espace (dilatation anisotrope).

5. Repères projectifs

Soient E un espace vectoriel de dimension $(n + 1)$ et (e_1, \dots, e_{n+1}) une base de E . Les points $\pi(e_1), \dots, \pi(e_{n+1})$ de $P(E)$ ne suffisent pas pour déterminer la base (e_1, \dots, e_{n+1}) , même à un coefficient de proportionnalité près. Mais en ajoutant à la famille $(\pi(e_i))_i$ un $(n + 2)$ -ième point $\pi(e_1 + \dots + e_{n+1})$, on reconstitue les vecteurs e_1, \dots, e_{n+1} à un unique coefficient près. Plus précisément :

Lemme :

Soient m_0, \dots, m_{n+1} des points de $P(E)$. Si deux bases (e_1, \dots, e_{n+1}) et (e'_1, \dots, e'_{n+1}) sont telles que :

$$m_1 = \pi(e_1) = \pi(e'_1), \dots, m_{n+1} = \pi(e_{n+1}) = \pi(e'_{n+1}) \text{ et}$$

$$m_0 = \pi(e_1 + \dots + e_{n+1}) = \pi(e'_1 + \dots + e'_{n+1}).$$

Alors il existe un scalaire non nul λ tel que $e'_i = \lambda e_i$, $i = 1, \dots, n + 1$.

Preuve :

$$\pi(e_i) = \pi(e'_i) = m_i \implies e'_i = \lambda_i e_i, \lambda_i \in \mathbb{K}^*.$$

$$\pi(e_1 + \dots + e_{n+1}) = \pi(e'_1 + \dots + e'_{n+1}) \implies (e'_1 + \dots + e'_{n+1}) = \lambda(e_1 + \dots + e_{n+1}).$$

On en déduit que $\lambda_i = \lambda$, $\forall i$, car (e_i) est une base.

Par conséquent les bases (e_i) et (e'_i) sont proportionnelles.

On appelle repère projectif de $P(E)$ tout système (m_0, \dots, m_{n+1}) de $n + 2$ points de $P(E)$ tels que m_1, \dots, m_{n+1} soient les images des vecteurs e_1, \dots, e_{n+1} d'une base de E et m_0 l'image de $e_1 + \dots + e_{n+1}$.

Exercice :

Montrer que (m_0, \dots, m_{n+1}) est un repère projectif de l'espace projectif $P(E)$ de dimension n si et seulement si, pour tous i, k ; m_i n'est pas dans le sous-espace projectif engendré par les m_j pour $j \neq i, k$.

Les coordonnées homogènes de $m \in P(E)$ dans la base (e_1, \dots, e_{n+1}) ne dépendent que de $(\pi(e_1), \dots, \pi(e_{n+1}))$. On peut donc parler de coordonnées homogènes dans un repère projectif.

6. Applications projectives et homographies

Soient E et E' deux espaces vectoriels, $\pi : E - \{0\} \rightarrow P(E)$ et $\pi' : E' - \{0\} \rightarrow P(E')$ les projections canoniques sur les espaces projectifs correspondants. Une application $h : P(E) \rightarrow P(E')$ est dite projective s'il existe une application linéaire injective $f : E \rightarrow E'$ telle que $\pi' \circ f = h \circ \pi$. L'application linéaire injective f , qui est définie à une constante multiplicative près, est appelée l'application homogène associée à h .

On peut généraliser au cas d'une application homogène associée f non injective, mais alors l'application projective n'est plus définie que sur le complémentaire du sous-espace projectif induit par $\ker f$, le noyau de f .

Si E est de dimension $(n + 1)$, une application projective est entièrement déterminée par la donnée de $(n + 2)$ points formant un repère projectif et de leurs images.

Les applications projectives bijectives sont appelées transformations projectives ou homographies.

Nous résumons dans la proposition ci-dessous quelques unes de leurs propriétés :

Proposition

a) L'ensemble des homographies d'un espace projectif $P(E)$ dans $P(E)$ est un groupe pour la composition des applications, appelé groupe projectif de E et noté $GP(E)$.

b) L'application qui, à tout automorphisme de E associe une homographie de $P(E)$ dans lui-même, est un homomorphisme surjectif de groupes, dont le noyau est le groupe \mathcal{H} des homothéties.

Il s'en suit que $GP(E) \approx GL(E) / \mathcal{H}$.

c) L'image d'un repère projectif de $P(E)$ par une homographie est un repère projectif de $P(E')$.

d) Etant donnés deux repères $(m_0, m_1, \dots, m_{n+1})$ et $(m'_0, m'_1, \dots, m'_{n+1})$ de $P(E)$ et $P(E')$ respectivement, il existe une unique homographie $h : P(E) \longrightarrow P(E')$ telle que $m'_i = h(m_i)$, $\forall i = 1, \dots, n + 1$.

Preuve

a) Si h et h' sont des homographies provenant d'isomorphismes f et f' , alors $h \circ h'$ est l'homographie provenant de $f \circ f'$. Aussi l'identité de $P(E)$ est une homographie provenant de l'identité de E et h^{-1} est une homographie provenant de f^{-1} . Il en résulte que $GP(E)$ est un groupe.

b) De ce qui précède, on déduit que l'application qui à tout automorphisme de E associe une homographie de $P(E)$ dans lui-même est un homomorphisme de groupes, surjectif par définition.

Si f est un automorphisme de E auquel cette application associe l'identité de $P(E)$, alors f préserve toutes les droites vectorielles de E ; ce qui signifie que, pour tout $x \in E$, il existe un réel λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.

On en déduit alors que f est une homothétie.

c) Cette assertion est assez claire et facile à vérifier.

d) Soient (e_1, \dots, e_{n+1}) et (e'_1, \dots, e'_{n+1}) deux bases de E telles que $m_i = \pi(e_i)$, $m'_i = \pi'(e'_i)$, $1 \leq i \leq n + 1$, $m_0 = \pi(e_1 + \dots + e_{n+1})$ et $m'_0 = \pi'(e'_1 + \dots + e'_{n+1})$.

Il existe un unique isomorphisme f de E dans E' tel que $f(e_i) = e'_i$, et qui vérifie nécessairement $f(e_1 + \dots + e_{n+1}) = e'_1 + \dots + e'_{n+1}$.

L'homographie h induite par f envoie bien le premier repère sur le second.

Si h' est une autre homographie qui envoie aussi le premier repère sur le second, alors l'homographie $h'^{-1} \circ h$ de $P(E)$ dans lui-même laisse le repère (m_0, \dots, m_{n+1}) invariant. Elle provient donc, d'après le lemme précédent, d'une homothétie. C'est donc l'identité de $P(E)$. Par suite $h' = h$.

Expression analytique des applications projectives

Soient $B = (e_1, \dots, e_{n+1})$ et $B' = (e'_1, \dots, e'_{n'+1})$ des bases de E et E' respectivement, de repères projectifs correspondants $\mathcal{R} = (m_0, m_1, \dots, m_{n+1})$ et $\mathcal{R}' = (m'_0, m'_1, \dots, m'_{n'+1})$ dans $P(E)$ et $P(E')$ respectivement.

La matrice homogène de l'application projective $h : P(E) \rightarrow P(E')$, dans les repères projectifs \mathcal{R} et \mathcal{R}' , est la matrice $A = (a_{ij})$ de l'application homogène associée f dans les bases B et B' .

Si l'on envoie à l'infini l'hyperplan passant par m_1, \dots, m_{n+1} , l'espace affine obtenu s'identifie à l'hyperplan $X_{n+1} = 1$ de E et on rapporte E au repère (affine) $(X_{n+1}, e_1, \dots, e_{n+1})$. Les coordonnées affines (x_1, \dots, x_n) d'un point m dans ce repère et ses coordonnées homogènes (X_1, \dots, X_{n+1}) sont reliées par les relations $x_i = \frac{X_i}{X_{n+1}}$. Si l'on fait de même dans $P(E')$, l'expression analytique homogène de h est donnée par les formules :

$$X'_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} X_j$$

et son expression analytique affine par les formules

$$x'_i = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + a_{i,n+1}}{\sum_{j=1}^n a_{n+1,j} x_j + a_{n+1,n+1}}$$

Les applications projectives sont donc définies analytiquement comme des quotients de formes affines par une même forme affine.

Homographie de la droite projective

Soient E un plan vectoriel, (e_1, e_2) une base de E et f un automorphisme de E . On a :

$$f(x, y) = (ax + by, cx + dy) \text{ avec } ad - bc \neq 0 ..$$

Si $y \neq 0$, $(x, y) \sim (\frac{x}{y}, 1) = (z, 1)$.

$f(z, 1) = (az + b, cz + d) \sim (\frac{az+b}{cz+d}, 1)$ à condition que $\frac{az+b}{cz+d}$ soit défini.

$f(1, 0) = f(\infty) = (a, c) \sim (\frac{a}{c}, 1) = f(\infty)$ si $c \neq 0$ et

$f(-d, c) = (-ad + bc, 0) \sim (1, 0) \sim \infty$.

Soient h l'homographie associée à f et $\phi : P(E) \longrightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ la bijection qui permet d'identifier $P(E)$ et $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$.

On a :

$$\phi \circ h \circ \phi : z \longmapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

Homographies et transformations affines

Les transformations affines sont les homographies du complété projectif qui préservent globalement l'hyperplan à l'infini. Plus précisément :

Proposition

Soient \mathcal{E} un espace affine dirigé par E , $P(E \oplus \mathbb{K})$ son complété projectif. Toute homographie de $P(E \oplus \mathbb{K})$ qui conserve l'hyperplan à l'infini, définit par restriction une transformation affine de \mathcal{E} .

Réciproquement toute transformation affine de \mathcal{E} se prolonge en une unique homographie de $P(E \oplus \mathbb{K})$.

Preuve :

Soit $h : P(E \oplus \mathbb{K}) \longrightarrow P(E \oplus \mathbb{K})$ une homographie préservant l'hyperplan à l'infini $P(E)$.

Alors h préserve aussi \mathcal{E} qui est le complémentaire de $P(E)$. Elle induit donc une transformation $\phi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$.

Montrons que ϕ est affine.

Soit f l'isomorphisme de $E \oplus \mathbb{K}$ dans $E \oplus \mathbb{K}$ définissant h . On a

$$\begin{cases} f(u, 0) &= (\sigma(u), 0) \\ f(0, 1) &= (\nu, a) \end{cases}$$

où σ est un automorphisme de E et $a \in \mathbb{K}^*$.

On peut donc choisir f (et donc σ) telle que $a = 1$, soit telle que $f(0, 1) \in \mathcal{E}$ sous-espace affine de $E \oplus \mathbb{K}$.

Notons $O = (0, 1) \in \mathcal{E}$. Pour tout point $M = (u, 1) \in \mathcal{E}$, on a

$$\phi(O)\bar{\phi}(M) = f(u, 1) - f(0, 1) = (\sigma(u), 0).$$

On en déduit donc que ϕ est affine d'application linéaire associée σ .

Réciproquement si ϕ est une transformation affine de \mathcal{E} et $\sigma = \vec{\phi}$ l'isomorphisme linéaire qui lui est associé, soit

$$f : (u, a) \in E \oplus \mathbb{K} \longmapsto a\phi(0, 1) + (\sigma(u), 0) \in P(E \oplus \mathbb{K}),$$

de sorte que f coïncide avec σ sur E et avec ϕ sur \mathcal{E} .

Il est facile de voir que f est linéaire et bijective.

L'homographie $h : P(E \oplus \mathbb{K}) \longrightarrow P(E \oplus \mathbb{K})$ déduite de f préserve $P(E)$.

L'unicité d'une telle homographie h prologéant ϕ est immédiat car elle agit sur tout point de \mathcal{E} de la même manière que ϕ . Et les points de $P(E)$ sont les directions de droites \mathcal{E} sur lesquelles ϕ opère par l'homographie de $P(E)$ définie par l'application linéaire σ associée à ϕ .

En dimension supérieure ou égale à deux, les homographies d'un espace projectif réel dans lui-même sont les bijections transformant une droite projective en une droite projective, ou mieux, qui transforment trois points alignés en trois points alignés.

7. Birapport sur une droite projective

Soient D une droite projective, a , b , c trois points distincts de D . Considérons les repères projectifs (a, b, c) et $(\infty, 0, 1)$ de D et $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ respectivement. Il existe une unique homographie $h : D \longrightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ telle que

$$h(a) = \infty, \quad h(b) = 0, \quad h(c) = 1.$$

Si $d \in D$, alors $h(d) \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ est appelé le birapport de (a, b, c, d) et noté $[a, b, c, d]$.

Remarque :

i)

$$[a, b, c, d] = \begin{cases} \infty & \text{si } d = a \\ 0 & \text{si } d = b \\ 1 & \text{si } d = c \end{cases}$$

ii) $[a, b, c, d] \in \mathbb{K} - \{0, 1\}$ si et seulement si les points a, b, c, d sont distincts. De plus, pour tout $k \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$, il existe un unique élément $d \in D$ tel que $[a, b, c, d] = k$.

Nous avons la propriété suivante :

Proposition

Soient a_1, a_2, a_3, a_4 quatre points de D , avec a_1, a_2, a_3 distincts et $a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 \in D'$, avec a'_1, a'_2, a'_3 distincts.

Pour qu'il existe une homographie $h : D \longrightarrow D'$ telle que $h(a_i) = a'_i$, il faut et il suffit que $[a_1, a_2, a_3, a_4] = [a'_1, a'_2, a'_3, a'_4]$.

Preuve :

Soit $h : D \longrightarrow D'$ une homographie telle que $h(a_i) = a'_i$ et

$h' : D' \longrightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ l'unique homographie telle que $h'(a'_1) = \infty$, $h'(a'_2) = 0$ et $h'(a'_3) = 1$. On a

$$[a'_1, a'_2, a'_3, a'_4] = h'(a'_4) .$$

Mais alors $h' \circ h$ est une (et donc l'unique) homographie de D vers $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ telle que $h' \circ h(a_1) = \infty$, $h' \circ h(a_2) = 0$ et $h' \circ h(a_3) = 1$.

Par conséquent

$$[a_1, a_2, a_3, a_4] = h' \circ h(a_4) = h'(a'_4) = [a'_1, a'_2, a'_3, a'_4] .$$

Réciproquement supposons $[a_1, a_2, a_3, a_4] = [a'_1, a'_2, a'_3, a'_4]$ et soit h l'unique homographie de D vers D' telle que $h(a_i) = a'_i$, $i \leq 3$.

On a bien $h(a_4) = a'_4$.

Si $f : D \longrightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ et $g : D' \longrightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ les homographies telles que $[a_1, a_2, a_3, a_4] = f(a_4)$ et $[a'_1, a'_2, a'_3, a'_4] = g(a'_4)$, on a alors d'après l'hypothèse $f(a_4) = g(a'_4)$ et par suite $h = g^{-1} \circ f$.

Calcul du birapport**Lemme**

Soient a, b, c trois points distincts d'une droite projective $D = \pi(E)$, x et y des vecteurs de E tels que $a = \pi(x)$, $b = \pi(y)$ et $c = \pi(x + y)$. Alors

$$d = \pi(\lambda x + \beta y) \Leftrightarrow [a, b, c, d] = \tilde{\pi}(\lambda, \beta) \text{ dans } P_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

Preuve :

Puisque $a \neq b$, (x, y) est une base de E . Notons $f : E \longrightarrow \mathbb{K}^2$ l'isomorphisme linéaire qui à tout vecteur de E associe ses coordonnées dans la base (x, y) .

L'homographie h définie par f envoie a sur ∞ , b sur 0 et c sur 1 .

On a donc $h(d) = [a, b, c, d]$. Et puisque $f(\lambda x + \beta y) = (h, k) \in \mathbb{K}^2$, alors

$$\pi(\lambda x + \beta y) = d \Leftrightarrow \tilde{p}(\lambda, \beta) = [a, b, c, d] .$$

Soit maintenant E un plan vectoriel de base (e_1, e_2) , a_1, a_2, a_3, a_4 quatre points de $P(E)$, avec a_1, a_2, a_3 distincts.

On suppose $a_i = \pi(w_i)$, avec $w_i = \lambda_i e_1 + \beta_i e_2$.

En utilisant le Lemme ci-dessus, on a :

$$[a_1, a_2, a_3, a_4] = \frac{\det(w_3, w_1)}{\det(w_3, w_2)} : \frac{\det(w_4, w_1)}{\det(w_4, w_2)}$$

Preuve :

Notons x_i un des vecteurs engendrant la droite vectorielle $\langle a_i \rangle$.

Puisque a_1 et a_2 et a_3 sont distinctes, les vecteurs x_1 , x_2 et x_3 sont deux à deux linéairement indépendants. Dans la base (x_1, x_2) , on a $x_3 = \alpha x_1 + \beta x_2$ et $x_4 = \gamma x_1 + \delta x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}(\alpha x_1) + \frac{\delta}{\beta}(\beta x_2)$.

En appliquant le lemme précédent à $x = \alpha x_1$ et $y = \beta x_2$, on a

$$[a_1, a_2, a_3, a_4] = \frac{\gamma}{\alpha} : \frac{\delta}{\beta}$$

En revenant à la base (e_1, e_2) , on obtient les systèmes

$$\begin{cases} \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta = \lambda_3 \\ \beta_1 \alpha + \beta_2 \beta = \beta_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lambda_1 \gamma + \lambda_2 \delta = \lambda_4 \\ \beta_1 \gamma + \beta_2 \delta = \beta_4 \end{cases}.$$

En exprimant α , β , γ et δ en fonction des λ_i et β_i , on obtient le résultat.

Cas d'une droite affine

Soient a , b , c , d , quatre points d'une droite affine, a , b , et c étant distincts.

Alors

$$[a, b, c, d] = \frac{d-b}{d-a} : \frac{c-b}{c-a}$$

Preuve : En se référant au résultat précédent, on a $a_i \neq \infty$. On peut donc choisir tous les $\beta_i = 1$ et on obtient l'égalité.

Si a , b , c sont trois points distincts d'une droite affine, en choisissant $\beta_i = 1$ pour $i \leq 3$ et $\beta_4 = 0$, on a

$$[a, b, c, \infty] = \frac{\bar{a}c}{\bar{b}c} = \frac{c-a}{c-b}$$

Autres conséquences du Lemme

Soient a, b, c, d quatre points alignés distincts. On a :

i)

$$[a, b, c, d] = [b, a, c, d] = [c, d, a, b] = [d, c, b, a]$$

ii)

$$[a, b, c, d] = [b, a, c, d]^{-1} = [a, b, d, c]^{-1}$$

iii)

$$[a, b, c, d] = 1 - [a, c, b, d] = 1 - [d, b, c, a]$$

Preuve : exercice.

Remarque :

Si $[a, b, c, d] = k$, alors les valeurs que prennent les 24 birapports obtenus en permutant les 4 points sont au nombre de 6. Il s'agit de $k, \frac{1}{k}, 1 - k, 1 - \frac{1}{k}, \frac{1}{1-k}$ et $\frac{k}{k-1}$.

Division harmonique

Si $[a, b, c, d] = -1$, on dit que les points a, b, c et d , forment une division harmonique.

Le point d est alors appelé le conjugué de c par rapport aux points a et b . Le point c est également le conjugué du point d par rapport aux points a et b .

Exemples

1. a, b, c et ∞ forment une division si c est milieu de $[a, b]$.

2. **La suite harmonique :**

Le point d'abscisse $\frac{1}{3}$ est le conjugué du point d'abscisse 1 par rapport aux points d'abscisses 0 et $\frac{1}{2}$.

Le point d'abscisse $\frac{1}{4}$ est le conjugué du point d'abscisse $\frac{1}{2}$ par rapport aux points d'abscisses 0 et $\frac{1}{3}$.

De manière générale, le point d'abscisse $\frac{1}{n+2}$ est le conjugué du point d'abscisse $\frac{1}{n}$ par rapport aux points d'abscisses $\frac{1}{n+1}$ et 0.

On définit ainsi la suite de nombres $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$, appelée suite harmonique que l'on retrouve en musique pour définir la gamme harmonique.

3. Moyenne harmonique :

Le conjugué de 0 par rapport à x et y est la moyenne harmonique de x et de y :

$$\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

4. Barycentre :

Si le point c est le barycentre des points pondérés (a, α) et (b, β) , alors son conjugué par rapport aux points a et b est le barycentre de $(a, -\alpha)$ et (b, β) .

5. Bissectrices :

Dans un triangle abc , les bissectrices intérieure et extérieure issues de c coupent la droite (ab) en deux points d et e tels que les points a, b, d et e forment une division harmonique.

8. Dualité projective

Soient E en espace vectoriel et E^* son dual, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires sur E . E^* est un espace vectoriel de même dimension que E . On peut donc considérer l'espace projectif $P(E^*)$ comme le dual de $P(E)$.

Soient F un sous-espace de E et $F' = \{\phi \in E^* / \phi|_F = 0\}$.

F' est un sous-espace vectoriel de E^* de dimension $\dim E - \dim F$.

La relation de dualité est une bijection de l'ensemble des sous-espaces projectifs de $P(E)$ sur lui-même (sur $P(E^*)$) qui inverse les inclusions et transforme un sous-espace de dimension k en un sous-espace de dimension $(n - 1 - k)$.

Par exemple en dimension projective 3, les points sont échangés avec les plans, et les droites avec elles-mêmes. Le théorème dual de : "par deux points distincts passe une et une seule droite" devient : "deux plans distincts se coupent en une droite. Un tétraèdre de sommets $ABCD$ devient par dualité un tétraèdre de faces $ABCD$. Dans le premier cas, les points A et B déterminent une arête (celle qui passe par A et B), et dans le deuxième cas aussi (l'intersection des faces A et B).

La dualité permet de produire l'analogue duale (parfois plus facile à démontrer) de la plupart des résultats connus.

Par exemple la réciproque dans le théorème de Desargues et le dual de l'énoncé direct.

Bibliographie

- [1] M. Audin, *Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [2] A. Bigard, *Géométrie*, Masson, 1998.
- [3] H. S. M. Coxeter, *Projective geometry*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 3. ed,1998.
- [4] Y. Ladegaillerie, *Géométrie*, Ellipses,2003.
- [5] D. Lehmann,R. Bkouche, *Initiation à la géométrie*, PUF, 1998.
- [6] J.-C. Sidler, *Géométrie projective*, Interéditions, 1993.