# Géométrie différentielle pour la physique

**Prof. Léonard TODJIHOUNDE**
*Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques*
*Département de Mathématiques - Faculté des Sciences et Techniques*
*Université d'Abomey-Calavi - Rép. du Bénin.*

# Variétés différentiables

Dans tout ce document la convention de sommation d'Einstein est utilisée

**Une variété topologique** de dimension $n$ est un espace topologique séparé et paracompact dont tout point possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Etant donnée une variété topologique $M$ de dimension $n$, on appelle une **carte locale** de $M$ tout couple $(U, \phi)$ où $U$ est un ouvert de $M$ et $\phi$ un homéomorphisme de $U$ sur l'ouvert $\phi(U)$ de $\mathbb{R}^n$.
Si le point $p \in U$, alors on peut identifier $p$ et le vecteur $\phi(p) \in \mathbb{R}^n$. Les composantes du vecteur $\phi(p)$ sont alors appelées les **coordonnées locales** du point $p$ dans la carte $(U, \phi)$.

Un **atlas** sur $M$ est une famille $(U_\alpha, \phi_\alpha)_\alpha$ de cartes locales de $M$ telle que la famille des ouverts $(U_\alpha)_\alpha$ recouvre $M$.
Une carte locale est dite compatible avec un atlas si en l'ajoutant à l'atlas on obtient encore un atlas ; et deux atlas sur $M$ sont dits compatibles si leur réunion est encore un atlas sur $M$.
Un atlas est dit maximal s'il contient toute carte locale compatible avec lui.

Un atlas $(U_\alpha, \phi_\alpha)_\alpha$ sur $M$ est dit différentiable (resp. de classe $C^k$) si, pour deux cartes quelconques $(U_\alpha, \phi_\alpha)$ et $(U_\beta, \phi_\beta)$ telles que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \Phi$, la **fonction de transition**

$$\phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

est de classe $C^\infty$ (resp. de classe $C^k$).

Une **structure différentiable** sur une variété topologique $M$ est la donnée sur $M$ d'un atlas différentiable maximal.
Une **variété différentiable** est une variété topologique munie d'une structure différentiable.

**Remarque**
1. La dimension d'une variété différentiable est unique.

2. Les fonctions de transition d'une structure différentiable sont des difféomorphismes.

Une variété différentiable est dite orientable si tous les changements de carte ont des jacobiens positifs.

Si dans tout ce qui précède on remplace $\mathbb{R}^n$ par le demi-espace $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ x_n \geq 0\}$, alors on dira que la variété $M$ est avec bord. L'ensemble des points de $M$ dont la $n$-ième coordonnée (dans la carte locale choisie) est nulle est alors appelé le bord de $M$ et noté $\partial M$.

**Exemples**

1. L'**espace euclidien** $\mathbb{R}^n$ est une variété différentiable de dimension $n$. Un atlas dfférentiable maximal étant donné par $\mathbb{R}^n$ lui-même et l'application identité.

2. La **sphère** $S^n = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ est une variété différentiable de dimension $n$. Un atlas différentiable maximal est donné par les cartes $(U_1, \phi_1)$ et $(U_2, \phi_2)$ telles que :
$U_1 = S^n \setminus \{(0, \cdots, 0, 1)\}$ , $U_2 = S^n \setminus \{(0, \cdots, 0, -1)\}$,
$\phi_1(x_1, \cdots, x_{n+1}) = (\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}})$ et $\phi_2(x_1, \cdots, x_{n+1}) = (\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}})$.
Les applications $\phi_1$ et $\phi_2$ sont appelées projections stéréographiques.

3. Soient $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. Considérons sur $\mathbb{R}^n$ la relation d'équivalence "$\sim$" définie par $x \sim y \Leftrightarrow \exists \ z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{Z}^n \ / \ x - y = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i e_i$.
Notons $\pi$ l'application projection sur les classes d'équivalence.
Alors l'ensemble des classes d'équivalence $T^n = \pi(\mathbb{R}^n)$, appelé le $n$-**tore**, est une variété différentiable de dimension $n$.
Les cartes sont les couples $(U_\alpha, \phi_\alpha)$ avec $U_\alpha = \pi(\Delta_\alpha)$ et $\phi_\alpha = (\pi_{|\Delta_\alpha})^{-1}$, où $\Delta_\alpha$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ne contenant aucune paire de points équivalents.

4. L'**espace projectif réel** $\mathbb{R}P^n$ des droites de $\mathbb{R}^{n+1}$ passant par l'origine est une variété différentiable de dimension $n$.
Les cartes sont données par les couples $(U_i, \phi_i)_i$ tels que :

$U_i = \{(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ / \ x_i \neq 0\}$ et
$\phi_i(x_0, \cdots, x_n) = (\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{x_i})$.
L'espace projectif $\mathbb{R}P^n$ peut être vu comme la sphère $S^n$ avec les points antipodaux confondus.

5. Le **produit cartésien** $M \times N$ de deux variétés différentiables $M$ et $N$ est une variété différentiable.
Si $(U_\alpha, \phi_\alpha)_\alpha$ et $(V_\beta, \psi_\beta)_\beta$ sont des atlas maximaux différentiables sur $M$ et $N$ resp. alors un atlas maximal différentiable sur $M \times N$ est donné par $(U_\alpha \times V_\beta, (\phi_\alpha, \psi_\beta))_{\alpha,\beta}$, avec $(\phi_\alpha, \psi_\beta)(p, q) = (\phi_\alpha(p), \psi_\beta(q))$.

**Partition de l'unité**

Soient $M$ une variété différentiable et $(U_\alpha)_\alpha$ un recouvrement ouvert de $M$. On appelle une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_\alpha)_\alpha$, la donnée d'un raffinement localement fini $(V_\beta)_\beta$ de $(U_\alpha)_\alpha$ et d'une famille correspondante de fonctions $C^\infty$ sur $M$ à supports compacts $(f_\beta)_\beta$ tels que :
$(i)$ $\quad supp\ f_\beta \subset V_\beta \ , \ \forall\, \beta$
$(ii)$ $\quad 0 \leq f_\beta \leq 1 \ , \ \forall\, \beta$
$(iii)$ $\quad \sum\limits_\beta f_\beta = 1.$

Nous avons le résultat suivant :

A tout recouvrement ouvert d'une variété différentiable, il existe une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement.

**Sous-variétés**

Soit $M$ une variété différentiable de dimension $n$.
Une **sous-variété** de $M$, de dimension $d \leq n$, est un sous-ensemble $W \subset M$ tel que, pour tout point $p \in W$, il existe une carte locale $(\Omega, \phi)$ de $M$ en $p$ avec $\phi(\Omega \cap W) = U \times V$, $U \subset \mathbb{R}^d$, $V \subset \mathbb{R}^{n-d}$ et $\phi(\Omega \cap W) = U \times \{0\}$.

La topologie d'une sous-variété de $M$ coincide avec celle induite par $M$.
Aussi si $W$ est une sous-variété de $M$, de dimension $d$, alors il existe en tout point $p \in W$ un système de coordonnées locales dans lequel $W$ est définie par les équations :
$$x^{p+1} = x^{p+2} = \cdots = x^n = 0 \ .$$

**Proposition**
Soient $f_1, \cdots, f_{n-d}$ des fonctions de classe $C^1$ définies sur une variété différentiable $M$ de dimension $n$ et $W$ le sous-ensemble de $M$ défini par le système d'équations :

$$f_1 = f_2 = \cdots = 0 \; .$$

Supposons que l'application $f : x \in M \longmapsto (f_1(x), \cdots, f_{n-d}(x)) \in \mathbb{R}^{n-d}$ soit de rang $(n-d)$ en tout point de $W$.
Alors $W$ est une sous-variété de $M$, de dimension $d$.

## Calculs sur les variétés

### Applications différentiables, difféomorphismes

Soient $M$ et $N$ deux variétés différentiables de dimensions $m$ et $n$ resp.
Une application $f : M \longrightarrow N$ est dite différentiable (resp. de classe $C^\infty$) si, pour toute carte locale $(U, \phi)$ sur $M$ et toute carte locale $(V, \psi)$ sur $N$, l'application composée $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est différentiable (resp. de classe $C^\infty$)
Le rang de la composée $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ ne dépend pas des cartes locales considérées sur $M$ et sur $N$.
Le rang de $f$ est alors défini comme étant le rang de la composée $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$.

L'application $f$ est appelée un difféomorphisme si $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est un difféomorphisme, pour toute carte locale $(U, \phi)$ sur $M$ et toute carte locale $(V, \psi)$ sur $N$.

### Immersions, submersions, plongements

Soient $M$ et $N$ deux variétés différentiables de dimensions $m$ et $n$ resp.
Une application différentiable $f : M \longrightarrow N$ est appelée une **immersion** si sa differentielle en tout point de $M$ est de rang $m$ (c'est-à-dire injective) ; ce qui implique $m \leq n$.
L'application $f$ sera appelée une **submersion** si sa différentielle en tout point de $M$ est de rang $n$ (c'est-à-dire surjective) ; ce qui implique $m \geq n$.
On dira que $f$ est un plongement si elle est une immersion injective réalisant un homéomorphisme de $M$ sur $f(M)$ (muni de la topologie induite par celle de $N$).

**Théorème de Whitney**
Toute variété différentiable connexe de dimension $n$ peut être plongée dans $\mathbf{R}^{n+2}$.

**Vecteurs tangents**

Soient $M$ une variété différentiable $M$ de dimension $n$ et $C^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions $C^\infty$ sur $M$.
Un **vecteur tangent** en un point $p \in M$ est toute application $\mathbb{R}$-linéaire $X_p : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant la règle de Leibniz :

$$X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g) \ , \ \forall \ f, g \in C^\infty(M) \ .$$

L'ensemble des vecteurs tangents au point $p \in M$ est appelé **espace tangent** à $M$ au point $p$ et noté $T_pM$.
L'espace tangent $T_pM$ est un espace vectoriel de dimension $n$ dont une base est donnée par les vecteurs (coordonnés) tangents $\frac{\partial}{\partial x_i}_{|p}$ définis par :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}_{|p}(f) = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial u_i}(\phi(p)) \ ,$$

où $\phi = (x^1, \cdots, x^n)$ est un système de cordonnées en $p$ et $(u^1, \cdots, u^n)$ sont les fonctions coordonnées sur $\mathbb{R}^n$.
Un vecteur tangent $X_p$ en $p$ pourra donc s'écrire :

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X^i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}_{|p} \ ,$$

où les $X^i(p) = X_p(x^i)$ sont appelés les composantes du vecteur $X_p$ dans le système de coordonnées $(x^1, \cdots, x^n)$.

Un **champ de vecteurs** sur $M$ est toute application
$X : M \longrightarrow TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$, de classe $C^\infty$, qui à tout point $p \in M$ associe un vecteur tangent $X(p) = X_p \in T_pM$.
L'ensemble des champs de vecteurs sur $M$ est noté $\chi(M)$ ou parfois par abus $TM$.

En coordonnées locales $(x^i)$ sur $M$ un champ de vecteur $X$ pourra s'écrire

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \ ,$$

où les composantes $X^i$ sont des fonctions sur $M$ données par $X^i = X(x^i)$.

### Courbes intégrales, flots

Soit $X$ un champ de vecteurs sur $M$. Une **courbe intégrale** $\gamma$ de $X$ est une courbe dans $M$ dont le vecteur tangent en un point $\gamma(t)$ est égal au vecteur tangent $X(\gamma(t))$.
En coordonnées locales, on a

$$\frac{d\gamma^k(t)}{dt} = X^k(\gamma(t)) \ ; \ k = 1, \cdots, n \ .$$

Etant donné un point $p \in M$, il existe une unique courbe intégrale $\gamma$ du champ de vecteurs $X$ telle que $\gamma(0) = p$. Notons $\gamma(t, p)$ le point de cette courbe correspondant à la valeur $t$ du paramètre.
L'application $\gamma : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$, qui à tout couple $(t_0, p_0) \in \mathbb{R} \times M$ associe le point correspondant à la valeur $t_0$ de la courbe intégrale $\gamma$ de $X$ avec $\gamma(0) = p_0$, est appelée le **flot** engendré par le champ de vecteurs $X$.

Le flot $\phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ engendré par un champ de vecteurs satisfait la relation :

$$\phi(t, \phi(s, p)) = \phi(t + s, p)$$

avec

$$\phi(0, .) = \mathrm{id}_M \ .$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, l'application $\phi_t : M \longrightarrow M$, définie par $\phi_t(p) = \phi(t, p)$, est un difféomorphisme.
La famille $(\phi_t)_t$ est appelée groupe à un paramètre de difféomorphismes défini par le flot de $X$.

**Exemple**

Considérons sur $M = \mathbb{R}^2$ le champ de vecteurs $X$ défini par
$X(x, y) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$.
Le flot engendré par $X$ est défini par :

$$\gamma(t, (x, y)) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t) \ .$$

Pour un point $(x, y)$ fixé, c'est un cercle centré à l'origine.

**Crochet de Lie**

On appelle **crochet de Lie** de deux champs de vecteurs $X$ et $Y$, le champ de vecteurs noté $[X, Y]$ et défini par :

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \ , \ \forall \ f \in C^\infty(M) \ .$$

En coordonnées locales $(x^i)_i$ sur $M$ on a :

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^{n} (\frac{\partial Y^i}{\partial x_j} X^j - \frac{\partial X^i}{\partial x_j} Y^j) \frac{\partial}{\partial x_i} \ .$$

Le crochet de Lie est $\mathbb{R}$-bilinéaire, antisymétrique et vérifie les propriétés suivantes :

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0 \ , \ \forall \ X, Y, Z \in \chi(M) \ .$$

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X(g))Y - g(Y(f))X \ , \ \forall \ X, Y \in \chi(M) \ , \ \forall \ f, g \in C^\infty(M) \ .$$

On dit que deux champs de vecteurs commutent si leur crochet de Lie est nul.

**1-formes, espaces cotangents**

On appelle **espace cotangent** en un point $p$ d'une variété différentiable $M$ l'espace vectoriel dual de $T_pM$. On le note $T_p^*M$ et ses éléments sont appelés des **covecteurs** au point $p$.
Une **1-forme** sur $M$ est une application $\omega : M \longrightarrow \underset{p \in M}{\cup} T_p^*M$ qui à tout point $p \in M$ associe un covecteur $\omega_p \in T_p^*M$.

L'ensemble des 1-formes sur $M$ est souvent noté $\Omega^1(M)$.
En coordonnées locales $(x^i)_i$ sur $M$ notons $(dx^i)_i$ la base duale de la base $(\frac{\partial}{\partial x_i})_i$ de $TM$.
Une 1-forme $\omega$ pourra s'écrire localement :

$$\omega = \sum_i \omega_i dx^i \ \text{ avec } \ \omega_i = \omega(\frac{\partial}{\partial x_i}) \ .$$

**Applications induites**

Soit $F : M \longrightarrow N$ une application entre deux variétés différentiables $M$ et $N$ de dimensions $m$ et $n$ resp.
Pour tout point $p \in M$, l'application linéaire tangente (ou application différentielle) de $F$ en $p$ est définie par $F_{*p} = dF_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ avec

$$dF_p(v)(f) = v(f \circ F) \ , \ \forall \ v \in T_pM \ , \ \forall \ f \in C^\infty(M) \ .$$

En coordonnées locales $(x^1, \cdots, x^m)$ sur $M$ et $(y^1, \cdots, y^n)$ sur $N$, on a

$$dF_p(\frac{\partial}{\partial x_i}_{|p}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F^k}{\partial x_i}_{|p} \frac{\partial}{\partial y^k}_{|F(p)} \ ,$$

où $F^1, \cdots, F^n$ sont les fonctions composantes de $F$ dans le système de coordonnées locales considérées.
On définit l'application linéaire tangente $F_* : TM \longrightarrow TN$ induite par $F$ en posant :

$$F_*(X)(p) = F_{*p}(X_p) \ , \ \forall \ X \in TM \ , \ \forall \ p \in M \ .$$

On a

$$F_*([X, Y]) = [F_*X, F_*Y] \ , \ \forall \ X, Y \in TM \ .$$

Si $F : M_1 \longrightarrow M_2$ et : $M_2 \longrightarrow M_3$ sont deux applications, on a

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_* \ .$$

On appelle **pull-back** de $F$ l'application $F^* : \Omega^1(N) \longrightarrow \Omega^1(M)$ définie par :

$$F^*(\omega)(X) = \omega(F_*X) \ , \ \forall \ \omega \in \Omega^1(N) \ , \ \forall \ X \in \chi(M) \ .$$

On a

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^* \ .$$

**Tenseurs**

Un **tenseur** de type $(r,s)$ en un point $p$ d'une variété différentiable $M$ est une fonction multilinéaire $T_p : (T_p^*M)^r \times (T_pM)^s \longrightarrow \mathbb{R}$.
**Un champ de tenseurs** de type $(r,s)$ (ou $r$ contravariant et $s$ covariant) sur $M$ est une application $T$, de classe $C^\infty$, qui à tout point $p \in M$ associe un tenseur $T_p$ de type $(r,s)$.
En coordonnées locales un champ de tenseurs de type $(r,s)$ s'écrit :

$$T = T^{i_1 i_2 \cdots i_s}_{j_1 j_2 \cdots j_r} dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s} \otimes \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_r} \ .$$

Un champ de tenseurs $T$ de type $(r,s)$ agit sur $r$ 1-formes et $s$ champs de vecteurs :

$$\begin{aligned} T(\omega_1, \cdots, \omega_r, X_1, \cdots, X_s) &= T^{i_1 i_2 \cdots i_s}_{j_1 j_2 \cdots j_r} dx^{j_1}(X_1) \cdots dx^{j_s}(X_s) \omega_1(\partial_{i_1}) \cdots \omega_r(\partial_{i_r}) \\ &= T^{i_1 i_2 \cdots i_s}_{j_1 j_2 \cdots j_r} X_1^{j_1} \cdots X_s^{j_s} \omega_1^{i_1} \cdots \omega_r^{i_r} \ . \end{aligned}$$

Un champ de tenseurs de type $(0,1)$ est une 1-forme et un champ de tenseurs de type $(1,0)$ est un champ de vecteurs.

On appelle $q$-forme (ou forme différentielle de dégré $q$) sur $M$ un champ de tenseurs de type $(0,q)$ sur $M$ qui est totalement antisymétrique.
L'ensemble des $q$-formes sur $M$ est noté $\Omega^q(M)$ et on notera $\Omega(M) = \bigcup\limits_{q \in \mathbb{N}} \Omega^q(M)$.
Pour un point $p \in M$ fixé, l'ensemble $\Omega^q_p(M)$ des $q$-formes au point $p$ est un espace vectoriel réel.

Si $f : M \longrightarrow N$ est une application entre variétés différentiables, à tout champ de tenseurs $T$ de type $(0,s)$ sur $N$ on peut associer un champ de tenseurs $f^*T$ de type $(0,s)$ sur $M$ en posant :

$$(f^*T)(X_1, \cdots, X_s) = T(f_* X_1, \cdots, f_* X_s) \ .$$

Dans le cas ou $M = N$ on peut étendre l'opération pull-back à tout champ de tenseurs $T$ de type $(r,s)$ sur $M$, en posant :

$$(f^*T)(\omega_1, \cdots, \omega_r, X_1, \cdots, X_s) = T(f^*\omega_1, \cdots, f^*\omega_r, f_* X_1, \cdots, f_* X_s) \ .$$

**Dérivée de Lie**

Soient $T$ un champ de tenseurs et $X$ un champ de vecteurs sur une variété différentiable $M$.
On appelle dérivée de Lie de $T$ dans la direction de $X$, le tenseur de même type que $T$ noté $L_X T$ et défini par :

$$L_X T_{|p} = \lim_{t=0} \frac{1}{t}(T_{|p} - \phi_t^* T_{|\phi_t(p)}) \ , \ \forall\, p \in M \ ,$$

où $\phi_t$ est le groupe à un paramètre de difféomorphismes associé au flot engendré par le champ de vecteurs $X$.

La dérivée de Lie est $\mathbb{R}$-linéaire par rapport aux deux arguments, $C^\infty(M)$-linéaire par rapport à la direction de dérivation et vérifie les propriétés suivantes :

$$L_X Y = [X, Y] \ \text{ et } \ L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y] \ , \ \forall\, X, Y \in \chi(M) \ ,$$

$$L_X f = X(f) \ \text{ et } \ L_X(d\omega) = d(L_X \omega) \ , \ \forall\, X \in \chi(M) \ , \ \forall\, \omega \in \Omega^r(M) \ .$$

**Produit extérieur des formes**

Soient $\alpha \in \Omega^r(M)$ et $\beta \in \Omega^s(M)$. On appelle produit extérieur de $\alpha$ et $\beta$, la $(r+s)$-forme notée $\alpha \wedge \beta$ qui est définie par :

$$\alpha\wedge\beta(X_1, \cdots, X_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_\sigma sgn(\sigma) \alpha(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(r)}) \beta(X_{\sigma(r+1)}, \cdots, X_{\sigma(r+s)}) \ ,$$

où $\sigma$ décrit l'ensemble des permutations de $\{1, \cdots, r+s\}$.

Le produit extérieur est associatif et vérifie les propriétés ci-après :

$$\alpha \wedge \alpha = 0 \ \text{ si } \alpha \text{ est de dégré impair} \ .$$

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha \ , \ \forall\, \alpha \in \Omega^r(M) \ , \ \forall\, \beta \in \Omega^s(M) \ .$$

En coordonnées locales sur $M$ (avec $\dim M = n$), si $(dx^1, \cdots, dx^n)$ désigne une base de $\Omega^1(M) = T^*M$, alors une base de $\Omega^r(M)$ est formée par l'ensemble des produits extérieurs de la forme $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r}$, avec $i_1 < \cdots < i_r$ appartenant à $\{1, \cdots, n\}$.
On en déduit que $\dim \Omega^r_p(M) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$.

**Produit intérieur**

On appelle produit intérieur d'une $r$-forme $\omega \in \Omega^r(M)$ par un champ de vecteurs $X \in \chi(M)$, la $(r-1)$-forme notée $i_X\omega$ et définie par :

$$i_X\omega(X_1, \cdots, X_{r-1}) = \omega(X, X_1, \cdots, X_{r-1}) \ , \ \forall\, X_1, \cdots, X_{r-1} \in \chi(M) \ .$$

**Dérivation extérieure**

On appelle dérivation extérieure des formes sur $M$, l'unique application $\mathbb{R}$-linéaire $d : \Omega(M) \longrightarrow \Omega(M)$ telle que :
*(i)* $\quad d_{|\Omega^r(M)} : \Omega^r(M) \longrightarrow \Omega^{r+1}(M)$
*(ii)* $\quad d^2 = d \circ d = 0$
*(iii)* $\quad d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha \wedge (d\beta) \ \ \forall\, \alpha, \beta \in \Omega(M)$.

Si $\omega \in \Omega^1(M)$, alors $d\omega$ est une 2-forme sur $M$ donnée par :

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]) \ .$$

Plus généralement si $\omega \in \Omega^r(M)$, alors $d\omega$ est une $(r+1)$-forme sur $M$ donnée par :

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \cdots, X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \cdots, X_{i-1}, \hat{X}_i, \cdots, X_{r+1})) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_{r+1}) \ . \end{aligned}$$

Une forme $\omega \in \Omega^r(M)$ est dite fermée si $d\omega = 0$ et elle est dite exacte s'il existe une forme $\alpha \in \Omega^{r-1}(M)$ telle que $\omega = d\alpha$.
Toute forme exacte est fermée.
l'espace des $r$-formes exactes $\mathrm{im}\, d_{r-1}$ est donc contenu dans l'espace des $r$-formes fermées $\ker d_r$.
On appelle groupe de cohomologie de De Rham d'ordre $r$ l'espace quotient $H^r(M) = \ker d_r / \mathrm{im}_{r-1}$.

**Exercice** :
Vérifier les relations suivantes :

$$L_X\omega = (di_X + i_X d)\omega \ \text{ et } \ L_X i_X \omega = i_X L_X \omega \ , \ \forall\, X \in \chi(M) \ , \ \forall\, \omega \in \Omega(M) \ .$$
$$i_{[X,Y]}\omega = X(i_X\omega) - Y(i_X\omega) \ , \ \forall\, X, Y \in \chi(M) \ , \ \forall\, \omega \in \Omega(M) \ .$$
$$i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X\omega \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha \wedge i_X\beta \ , \ \forall\, X \in \chi(M) \ , \ \forall\, \alpha, \beta \in \Omega(M) \ .$$

**Intégration des formes différentielles**

Soit $M$ une variété différentiable orientable de dimension $n$.
Il existe sur $M$ une $n$-forme $\omega$ qui ne s'annule nulle part. Par exemple la $n$-forme définit en coordonnées locales $(x^i)_i$ en un point $p \in M$ par :

$$\omega(p) = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \ .$$

Une telle $n$-forme est appelée un élément de volume sur $M$.

Tout élément de volume $\omega$ sur $M$ s'écrit localement

$$\omega = h(p) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \ ,$$

où $h$ est une fonction soit strictement positive, soit strictement négative sur $M$.
Nous obtenons ainsi deux classes d'éléments de volume sur $M$.
Le choix d'un représentant d'une des deux classes fixe une orientation sur $M$ et définira la mesure par rapport à laquelle nous allons intégrer les fonctions et les $n$-formes sur $M$.

Soient $M$ une variété orientable, $(U_i, \phi_i)$ une carte de $M$ de coordonnées associées $x = (x^i)_i$, $\omega$ un élément de volume sur $M$ qui s'écrit localement $\omega = hdx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ et $f$ une fonction sur $M$.

L'intégrale de la $n$-forme $f\omega$ sur $U_i$ est définie par :

$$\int_{U_i} f\omega = \int_{\phi_i(U_i)} f(\phi_i^{-1}(x))h(\phi_i^{-1}(x))dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \ .$$

Notons $(U_i, \varepsilon_i)_i$ une partition de l'unité subordonnée à un atlas de $M$.
Posons $f_i = f\varepsilon_i$. On a :

$$f(p) = \sum_i f(p)\varepsilon_i(p) = \sum_i f_i(p) \ , \ \forall \ p \in M \ .$$

L'intégrale de $f\omega$ sur $M$ est alors définie par :

$$\int_M f\omega = \sum_i \int_{U_i} f_i\omega \ .$$

Cette définition ne dépend ni de l'atlas choisi, ni de la partition de l'unité considérée.

**Exemple**

Considérons $M = S^1$, $U_1 = S^1 \setminus \{(1,0)\}$, $U_2 = S^1 \setminus \{(-1,0)\}$,
$\varepsilon_1(\theta) = \sin^2(\frac{\theta}{2})$, $\varepsilon_2(\theta) = \cos^2(\frac{\theta}{2})$.
$(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_1, U_2)$ de $S^1$.
Nous avons par exemple :

$$\begin{aligned} \int_{S^1} \cos\theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \cos\theta \sin^2(\frac{\theta}{2})d\theta + \int_0^{2\pi} \cos\theta\cos^2(\frac{\theta}{2})d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \ ; \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat connu depuis longtemps.

**Théorème de Stokes**

Soit $M$ une variété différentiable de dimension $n$ orientée et compacte avec bord $\partial M$ Pour toute $(n-1)$-forme $\alpha$ sur $M$, on a l'égalité suivante :

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha \quad \text{(théorème de Stokes)} \ .$$

# Variétés riemanniennes

## Métriques riemanniennes

Une métrique riemannienne sur une variété différentiable $M$ est un champ de 2-tenseurs covariants $g$ sur $M$ tel que, pour tout $p \in M$, $g_p$ définit un produit scalaire sur $T_pM$.

En coordonnées locales $(x^i)_i$ sur $M$, on a :

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j \ .$$

Sur toute variété différentiable $M$ il existe une métrique riemannienne.

Par exemple si $\phi$ désigne l'immersion de $M$ dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ donnée par le théorème de Withney, alors le tenseur $g$ défini sur $M$ par :

$$g(X,Y) = < \phi_* X, \phi_* Y > \ , \ \forall \ X, Y \in \chi(M) \ ,$$

est une métrique riemannienne sur $M$.

Une variété riemannienne $(M,g)$ est une variété différentiable $M$ munie d'une métrique riemannienne.

La donnée d'une métrique $g$ sur $M$ induit une fonction norme sur $\chi(M)$ définie par :

$$\|X\|(p) = \sqrt{g_p(X_p, X_p)} \ , \ \forall \ X \in \chi(M) \ , \ \forall \ p \in M \ .$$

En identifiant localement la métrique $g$ avec la matrice $(g_{ij})$ qui est inversible, on appelle inverse de $g$ le champ tenseurs identifiable localement à la matrice inverse $(g_{ij})^{-1}$. On le note $g^{-1}$ et ses composantes locales sont notées $g^{ij}$. On a donc la relation :

$$g^{il}g_{jl} = g_{kj}g^{ki} = \delta^i_j \ ,$$

où $\delta^i_j = 1$ si $i = j$ et $\delta^i_j = 0$ si $i \neq j$.

Soit $(M, g)$ est une variété riemannienne. A tout champ de vecteurs $X$ sur $M$ on peut associer une 1-forme $X^\flat$ définie par :

$$X^\flat(Y) = g(X, Y) \ . \ \forall \ Y \in \chi(M) \ .$$

De même à toute 1-forme $\alpha$ sur $M$, on peut associer un champ de vecteurs $\alpha^\sharp$ défini par :

$$g(\alpha^\sharp, X) = \alpha(X) \ , \ \forall \ X \in \chi(M) \ .$$

Les deux correspondances ainsi définies sont des isomorphismes réciproques appelés **isomorphismes musicaux**.

## Connexions linéaires

Une **connexion linéaire** sur une variété différentiable $M$ est une application $\nabla : (X, Y) \in \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \nabla_X Y \in \chi(M)$ qui est $C^\infty(M)$-linéaire par rapport à la première variable, $\mathbb{R}$-linéaire par rapport à la deuxième variable et vérifie la règle de Leibniz :

$$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f(\nabla_X Y) \ , \ \forall \ X, Y \in \chi(M) \ , \ \forall \ f \in C^\infty(M) \ .$$

Soit $\nabla$ une connexion linéaire sur $M$.
On appelle torsion sur $M$ définie par $\nabla$, l'application
$T : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow\in \chi(M)$ donnée par :

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \ , \ \forall \ X, Y \in \chi(M) \ .$$

La **courbure** définie par $\nabla$ sur $M$ est l'application
$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow\in \chi(M)$ donnée par :

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} \ , \ \forall \ X, Y, Z \in \chi(M) \ .$$

Un champ de vecteurs $X$ est dit **parallèle** (par rapport à une connexion $\nabla$) le long d'une courbe $\gamma$ sur $M$ si

$$\nabla_{\dot\gamma(t)}X = 0 \ .$$

Une courbe $\gamma$ de $M$ est dite **géodésique ou auto-parallèle** si

$$\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t) = 0 \ .$$

Le champ de vecteurs $\nabla_X Y$ est appelé dérivée covariante de $Y$ dans la direction de $X$.

Plus généralement la dérivée covariante d'un champ de tenseurs $S$ de type $(0,r)$ dans la direction d'un champ de vecteurs $V$ est le champ de tenseurs $\nabla_V S$ de même type donné, pour $X_1, \cdots, X_r \in \chi(M)$, par :

$$\nabla_V S(X_1, \cdots, X_r) = V(S(X_1, \cdots, X_r)) - \sum_{i=1}^{n} S(X_1, \cdots, \nabla_V X_i, \cdots, X_r) \ .$$

Une connexion linéaire $\nabla$ sur une variété riemannienne $(M,g)$ est dite métrique si

$$\nabla_X g = 0 \ , \ \forall \ X \in \chi(M) \ .$$

Il s'en suit la relation :

$$X[g(Y,Z)] = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \ , \ \forall \ X, Y, Z \in \chi(M) \ .$$

Il y a une connexion particulière qui sera privilégiée parmi toutes les connexions définies sur une variété riemannienne :

Sur une variété riemannienne $(M,g)$ il existe une unique connexion $\nabla$ qui soit métrique et sans torsion.

Cette connexion, appelée **connexion de Levi-Civita**, est donnée par la formule de Koszul :

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_U X, V) &= Xg(U,V) + Ug(X,V) - Vg(U,X) \\ &= -g(U,[X,V]) - g(X,[U,V]) - g(V,[X,U]) \ . \end{aligned}$$

En coordonnées locales $(x^i)_i$, une connexion $\nabla$ sur $M$ (avec $\dim M = n$) est déterminée par la donnée de $n^3$ fonctions $\Gamma^k_{ij}$ telles que :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} \ .$$

Si $\nabla$ est la connexion de Levi-Civita sur $M$, alors les fonctions $\Gamma^k_{ij}$ sont appelées coefficients de Christoffel et sont données par :

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right) \ .$$

Et si $X = X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = Y^k \frac{\partial}{\partial x_k}$, alors :

$$\nabla_X Y = X^i \left( \frac{\partial Y^k}{\partial x_i} + \Gamma^k_{ij} Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \ .$$

Aussi

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} dx^j = \Gamma^j_{ik} dx^k \ .$$

Par rapport à la connexion de Levi-Civita, les équations de géodésiques de $M$ s'écrivent localement :

$$\ddot{\gamma}^k(t) + \Gamma^k_{ik} \dot{c}^i(t) \dot{c}^j(t) = 0 \ , \ \forall \ k = 1, \cdots, n \ .$$

Soient $M$ une variété riemannienne, $p \in M$ et $v \in T_pM$.
Alors il existe une unique géodésique $\gamma_v$ de $M$ telle que $\gamma(0) = p$ et $\dot{\gamma}_v(0) = v$.
Cette unique géodésique dépend de façon lisse de $p$ et $v$.

On appelle alors **application exponentielle** au point $p$, la correspondance $\exp_p : T_pM \longrightarrow M$ donnée par :

$$\exp_p(v) = \gamma_v(1) \ . \ \forall \ v \in T_pM \ ,$$

à condition que le point $\gamma_v(1)$ soit défini dans $M$.

Pour tout vecteur $v \in T_pM$, on a

$$d \exp_p(0)(v) = v$$

c'est-à-dire que $d\exp_p(0) = \mathrm{id}_{T_pM}$.
Il en résulte que l'application $\exp_p$ définit un difféomorphisme d'un voisinage $V$ du vecteur nul 0 dans $T_pM$ dans un voisinage $U$ du point $p$ dans $M$.

On appelle **coordonnées normales** en $p$ les coordoonnées locales définies par la carte locale $(U, \exp_p^{-1})$.

En coordonnées normales en un point $p \in M$, nous avons :

$$g_{ij}(p) = \delta_{ij} \;\text{ et }\; \Gamma_{ij}^k(p) = 0\ ,\ \forall\, i, j, k = 1, \cdots, n\ .$$

Si $(x_i)_i$ est un système de coordonnées locale en $p$, les coordonnées normales $(x'_j)_j$ en $p$ sont données par :

$$x'_i = x_i - x_i(p) + \Gamma_{jk}^i (x_j - x_j(p))(x_k - x_k(p))\ .$$

On dira que la variété riemannienne $(M, g)$ est géodésiquement complète s'il existe un point $p \in M$ tel que $\exp_p$ soit définie sur tout l'espace tangent $T_pM$ (et alors c'est vrai en tout point de $M$).

Le $(0, 4)$-tenseur $R$ d'éfini par $R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y, Z), W)$ est appelé **tenseur de courbure de Riemann** sur $(M, g)$.

Le tenseur de courbure de Riemann vérifie les propriétés ci-après :

$$R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$$
$$R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$$
$$R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$$
$$R(X, Y, Z, W) + R(Z, X, Y, W) + R(Y, Z, X, W) = 0 \;\text{ (1. identité de Bianchi)}$$
$$(\nabla_X R)(Y, Z)W + (\nabla_Z R)(X, Y)W + (\nabla_Y R)(Z, X)W = 0 \text{ (2. identité de Bianchi)}\ .$$

On appelle **tenseur de Ricci** d'une variété riemannienne $(M, g)$, le champ de 2-tenseurs covariants $Ric$ définit par :

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= \mathrm{trace}_g(Z \longmapsto R(X, Z)Y) \\ &= \sum_{i=1}^n g(R(X, E_i)Y, E_i)\ , \end{aligned}$$

où $R$ désigne la courbure définie plus haut et $(E_i)_i$ est une base orthonormée par rapport à la métrique $g$.

Le tenseur de Ricci est symétrique comme le montre la propriété $(iii)$ du tenseur de courbure.

On appelle **courbure scalaire** de $(M, g)$ la fonction $Scal$ donnée par la trace par rapport à $g$ du tenseur de Ricci.

En coordonnées locales $(x^i)_i$ sur $M$, on a :

$$R = R_{ijkl} dx^i \oplus dx^j \oplus dx^k \oplus dx^k \ , \text{ avec } \ R_{ijkl} = R(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}) \ .$$

$$Ric = R_{ik} dx^i \oplus dx^k \ , \text{ avec } \ R_{ik} = g^{jl} R_{ijkl} \ .$$

$$Scal = g^{ij} R_{ij} \ .$$

Si $X$ et $Y$ sont deux champs de vecteurs linéairement indépendants, on appelle courbure sectionnelle du plan engendré par $X$ et $Y$, la fonction $\sigma(X, Y)$ définie sur $M$ par :

$$\sigma(X, Y) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - (g(X, Y))^2} \ .$$

La courbure sectionnelle détermine le tenseur de courbure.
Si la courbure sectionnelle est constante égale à $k$, on a :

$$R(X, Y, Z, W) = k(g(X, Z)g(Y, W) - g(X, Y)g(Z, W)) \ .$$

Une forme d'espace est une variété riemanienne de courbure sectionnelle constante $k$. La forme d'espace sera dit sphérique, plat ou hyperbolique suivante que la courbure sectionnelle est constante positive, nulle ou négative.

La **forme volume** sur $(M, g)$ est la $n$-forme $dv$ donnée localement par :

$$dv = \sqrt{\det g} \, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \ .$$

Si $M$ est compacte, l'intégrale sur $M$ de la forme volume est alors appelée volume de $M$ ; i.e.

$$vol(M) = \int_M dv \ .$$

**Vecteur gradient, divergence et laplacien**

Soient $(M, g)$ une variété riemannienne et $f \in C^\infty(M)$.
Le gradient de $f$ est le champ de vecteurs noté $\mathrm{grad}\, f$ et défini par :

$$g(\mathrm{grad}\, f, X) = X(f) = df(X) \ , \ \forall\ X \in \chi(M) \ .$$

En coordonnées locales $(x^i)^i$ sur $M$, on a :

$$\mathrm{grad}\, f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \ .$$

On appelle divergence d'un champ de vecteurs $X$ sur $M$, la fonction $\mathrm{div}\, X$ définie par :

$$\mathrm{div}\, X(p) = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{E_i} X, E_i) \ ,$$

où $(E_i)_i$ une base orthonormée de $T_pM$.

En coordonnées locales,

$$\mathrm{div}\, X = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial X_i}{\partial x_i} + \Gamma^i_{ij} X^j) = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x_j} (\sqrt{\det g} X^j) \ .$$

Pour tout champ de vecteurs $X$ sur $M$, on a la relation suivante :

$$L_X(dv) = (\mathrm{div}\, X)\ dv \ ,$$

où $dv$ désigne la forme volume sur $M$.
Il en résulte que si $X$ est de divergence nulle, alors l'élément de volume $dv$ est préservé par le groupe à un paramètre engendré par $X$.

Si $\alpha \in \Omega^1(M)$ est une 1-forme sur $M$, on définit la codifférentielle de $\alpha$ comme étant la fonction $\delta\alpha$ donnée par :

$$\delta\alpha = -\operatorname{div}\alpha^\sharp \ .$$

Une 1-forme dont la codifférentielle est nulle est dite co-fermée.

On appelle laplacien d'une fonction $f \in C^\infty(M)$, la fonction $\Delta f$ définie par :

$$\Delta f = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \ .$$

En coordonnées locales,

$$\begin{aligned} -\Delta f &= \frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial}{\partial x_j}(\sqrt{\det g}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}) \\ &= g^{ij}(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}) \ . \end{aligned}$$

Si $f \in C^\infty(M)$ et $\phi \in C^\infty(M)$ sont deux fonctions sur $M$, on a :

$$\Delta(f\phi) = f\Delta\phi - 2g(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad}\phi) + \phi\Delta f \ .$$

Le laplacien d'une 1-forme $\alpha \in \Omega^1(M)$ est la 1-forme $\Delta\alpha$ définie par :

$$\Delta\alpha = \delta(d\alpha) + d(\delta\alpha) = (\delta \circ d + d \circ \delta)\alpha \ .$$

Un fonction $f \in C^\infty(M)$ ou une 1-forme $\alpha \in \Omega^1(M)$ telle que $\Delta f = 0$ ou $\Delta\alpha = 0$ est dite harmonique.

Sur une variété riemannienne compacte, toute fonction harmonique est constante et une 1-forme est harmonique si et seulement si elle est fermée et cofermée.

La 2-forme fondamentale d'une fonction $f \in C^\infty(M)$ est la 2-forme $H_f = \nabla df$ définie, pour $X, Y \in \chi(M)$, par :

$$\nabla d(X,Y) = \nabla_X(df)(Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)f \ .$$

On a la relation :

$$\Delta f = \operatorname{trace}_g(\nabla df) \ .$$

# Groupes et algèbres de Lie

## Groupes de Lie

**Définition**
Un **groupe de Lie** $G$ de dimension $n$ est une variété différentiable de dimension $n$ muni d'une structure de groupe multiplicatif telle que les applications "produit" : $(g_1, g_2) \in G \times G \longmapsto g_1 g_2 \in G$, et passage à l'inverse : $g \in G \longmapsto g^{-1} \in G$ soient différentiables.

**Exemples**
1. $\mathbb{R}$ muni de l'addition des réels, $\mathbb{R}_+$ muni de la multiplication des réels, $\mathbb{R}^2$ muni de l'addition de couples de réels sont des groupes de Lie

2. Le cercle $S^1 = \{\mathrm{e}^{i\theta} \ / \ \theta \in \mathbb{R}\}$ du plan complexe, muni de la multiplication définie par : $\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{e}^{i\phi} = \mathrm{e}^{i(\theta+\phi)}$, est un groupe de Lie noté $U(1)$.

3. Le groupe linéaire réel $GL(n, \mathbb{R})$ ou complexe $GL(n, \mathbb{C})$ muni de la multiplication des matrices est un groupe de Lie.

Certains sous-ensembles particuliers de $GL(n, \mathbb{R})$ et $GL(n, \mathbb{C})$, muni de la même multiplication des matrices, sont aussi des groupes de Lie.

Un sous-groupe de Lie d'un groupe de Lie $G$ est une sous-variété de $G$ qui, muni de la restriction de la multiplication sur $G$, est un groupe de Lie.

**Proposition**
Tout sous-groupe fermé d'un groupe de Lie est un sous-groupe de Lie.

**Preuve** : exercice.

**Exemples de sous-groupes de Lie**
1. Le **groupe orthogonal** $O(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) \ , \ MM^t = M^t M = \mathbf{1}\}$, où "$^t$" dénote la transposition des matrices,
le **groupe spécial linéaire** $SL(n, \mathbb{R}) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) \ / \ \det M = 1\}$ et
le **groupe spécial orthogonal** $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$ sont des sous-groupes de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$.

2. Le **groupe unitaire** $U(n) = \{M \in GL(n,\mathbb{C})\ ,\ MM^\dagger = M^\dagger M = \mathbf{1}\}$, où "$^\dagger$" dénote la conjuguée des matrices,
le **groupe spécial linéaire** $SL(n,\mathbb{C}) = \{M \in GL(n,\mathbb{C})\ /\ \det M = 1\}$ et
le **groupe spécial unitaire** $SU(n) = U(n) \cap SL(n,\mathbb{C})$ sont des sous-groupes de Lie de $GL(n,\mathbb{C})$.

Soient $G$ un groupe de Lie et $H$ un sous-groupe de Lie de $G$.
Considérons sur $G$ la relation d'équivalence (le vérifier) "$\sim$" définie par : $g \sim g'$ si et seulement s'il existe $h \in H\ /\ g' = gh$.
L'ensemble des classes d'équivalence est l'ensemble quotient $G/H$.
Supposons que $H$ soit un sous-groupe normal de $G$ ;
ie : $\forall\, g \in G\ ,\ \forall\, h \in H\ ,\ ghg^{-1} \in H$.
Alors $G/H$ est un groupe de Lie de dimension $(\dim G - \dim H)$.

## Algèbres de Lie

**Définition**
Une **algèbre de Lie** $\mathcal{G}$ sur un corps $\mathbb{K}$ est un ensemble, qui d'une part est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et qui d'autre part est muni d'une loi de composition interne bilinéaire notée $[\ ,\ ]$ (appelée crochet de Lie) et vérifiant les conditions suivantes :

$$\text{Antisymétrie : } [X,Y] = -[Y,X]\ ,\ \forall\, X,Y \in \mathcal{G}$$

$$\text{Identité de Jacobi : } [X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0\ ,\ \forall\, X,Y,Z \in \mathcal{G}\ .$$

**Exemple fondamental**
Toute algèbre associative $\mathcal{A}$ peut être munie d'une structure d'algèbre de Lie en posant :

$$[X,Y] = XY - YX\ ,\ \forall\, X,Y \in \mathcal{A}\ .$$

Soient $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie et $(X_i)_{i=1,\cdots,n}$ (avec $n = \dim \mathcal{G}$) une base de $\mathcal{G}$ en tant qu'espace vectoriel.
Le crochet de deux vecteurs $X_i$ et $X_j$ de cette base de $\mathcal{G}$ étant un élément de $\mathcal{G}$, il existe des scalaires $C_{ij}^k$, $k = 1,\cdots,n$, tels que :

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k\ .$$

Les $n^3$ scalaires $C_{ij}^k$ sont appelés constantes de structure de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ par rapport à la base choisie.

A partir de l'antisymétrie et de l'identité de Jacobi, on obtient pour les constantes de structure les relations suivantes :

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k \;\text{ et }\; C_{ij}^k C_{kl}^p + C_{li}^k C_{kj}^p + C_{jl}^k C_{ki}^p = 0 \;.$$

**Algèbre de Lie d'un groupe de Lie**

Soient $a$ et $g$ deux éléments d'un groupe de Lie $G$. La **translation à droite** $R_a : G \longrightarrow G$ et la **translation à gauche** $L_a : G \longrightarrow G$ de $g$ par $a$ sont définies par :

$$R_a(g) = ga \;\text{ et }\; L_a(g) = ag \;.$$

Ces applications, qui sont des diffeomorphismes, induisent des applications tangentes $R_{a*} : T_gG \longrightarrow T_{ga}G$ et $L_{a*} : T_gG \longrightarrow T_{ag}G$ entre les espaces tangents.
Nous nous interesserons dans la suite à la translation à gauche.

Un champ de vecteurs $X$ sur $G$ est dit invariant à gauche si

$$L_{a*}X_{|g} = X_{|ag} \;.$$

Soit $e$ l'élément neutre de $G$. Un vecteur $V \in T_eG$ induit un unique champ de vecteurs invariant à gauche $X_V$ sur $G$ défini par la relation

$$X_V|g = L_{g*}V \;,\; \forall\, g \in G \;.$$

Inversement , un champ de vecteurs invariant à gauche $X$ définit un unique vecteur $V = X_{|e} \in T_eG$.

Notons $\mathcal{G}$ l'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche sur $G$.
L'application qui à tout vecteur $V \in T_eG$ associe le champ de vecteurs invariant à gauche $X_V$ défini ci-dessus est un isomorphisme de $T_eG$ sur $\mathcal{G}$.
Il s'en suit que $\mathcal{G}$ est un espace vectoriel de même dimension que la variété $G$.

Le crochet de Lie de deux éléments de $\mathcal{G}$ (considérés comme champs de vecteurs sur $G$) est encore un élément de $\mathcal{G}$ ; c'est-à-dire que $\mathcal{G}$ est fermé sous l'action du crochet de Lie des champs de vecteurs.

L'ensemble $\mathcal{G}$ des champs de vecteurs invariants à gauche muni de la restriction du crochet de Lie sur $\chi(G)$ (ensemble des champs de vecteurs sur $G$) a une structure d'algèbre de Lie, appelée algèbre de Lie du groupe de Lie $G$.

**Exemples**

1. a) $G = \mathbb{R}$ (groupe additif).
La translation à gauche $L_a$ $(a \in \mathbb{R})$ est définie par

$$L_a(x) = a + x \ .$$

Considérons le champ de vecteur $X = \frac{\partial}{\partial x}$. On a

$$L_{a*}X|_x = \frac{\partial(a+x)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial(a+x)} = X|_{a+x} \ .$$

Il s'en suit que $X = \frac{\partial}{\partial x}$ est un champ de vecteurs invariant à gauche.
L'algèbre de Lie du groupe additif $\mathbb{R}$ est engendrée par ce champ de vecteurs.

b) De même le champ de vecteurs $X = \frac{\partial}{\partial \theta}$ est invariant à gauche sur $G = SO(2) = \{\mathrm{e}^{\theta} \ / \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ et engendre l'algèbre de Lie $so(2)$ de ce groupe.

On peut donc remarquer que les groupes de Lie $\mathbb{R}$ et $SO(2)$ ont la même algèbre de Lie.

2. L'algèbre de Lie $gl(n,\mathbb{R})$ du groupe de Lie $GL(n,\mathbb{R})$ est l'ensemble $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$ de toutes les matrices carrés d'ordre $n$.
On a bien $\dim gl(n,\mathbb{R}) = n^2 = GL(n,\mathbb{R})$.

3. L'algèbre de Lie $sl(n,\mathbb{R})$ du groupe de Lie $SL(n,\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à trace nulle ; ie

$$sl(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \ / \ \mathrm{trace}\, A = 0\} \ .$$

On a $\dim sl(n,\mathbb{R}) = n^2 - 1$.

4. a) L'algèbre de Lie $o(n)$ du groupe de Lie $O(n)$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ antisymétriques ;

$$o(n) = \{A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \ / \ A^t + A = 0\} \ .$$

b) Le groupe spécial orthogonal $SO(n)$ a la même algèbre de Lie $so(n)$ que le groupe orthogonal $O(n)$ ; soit :

$$so(n) = o(n) = \{A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \ / \ A^t + A = 0\} \ .$$

On a $\dim so(n, \mathbb{R}) = \dim o(n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

5. L'algèbre de Lie $gl(n, \mathbb{C})$ du groupe de Lie $GL(n, \mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients complexes et est de dimension réelle $2n^2$.

L'algèbre de Lie $sl(n, \mathbb{C})$ du groupe de Lie $SL(n, \mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients complexes à trace nulle.
Elle est de dimension réelle $2(n^2 - 1)$.

L'algèbre de Lie $u(n)$ du groupe de Lie $U(n)$ est l'ensemble des matrices anti-hermitiennes avec $\dim u(n) = n^2$.

L'algèbre de Lie $su(n)$ du groupe de Lie $SU(n)$ est donnée par
$su(n) = u(n) \cap sl(n, \mathbb{C})$. On a $\dim su(n) = n^2 - 1$.

Notons $(V_i)_{i=1,\cdots,n}$ une base de $T_eG$ et posons $X_i|g = L_{g*}V_i$, pour $g \in G$.
Alors $(X_i)_{i=1,\cdots,n}$ est un repère de champs de vecteurs invariants à gauche sur $G$.
Les scalaires $C_{ij}^k$ définis par :

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k$$

sont appelés constantes de structure du groupe de Lie $G$.

Notons $(\theta^i)_{i=1,\cdots,n}$ la base duale de la base $(X_i)_{i=1,\cdots,n}$.
les 1-formes $\theta^i$ satisfont l'équation de structure de Maurer-Cartan :

$$d\theta^k = -\frac{1}{2} C_{ij}^k \theta^i \theta^j$$

Pour $g \in G$, on peut définir l'application
$\theta_g : X \in T_gG \longmapsto (L_{g^{-1}}) * X = (L_g) *^{-1} X \in T_eG$
On définit ainsi une 1-forme $\theta : g \longmapsto \theta_g$ sur $G$, à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, appelée la 1-forme canonique ou forme de Maurer-Cartan sur $G$.
La 1-forme canonique satisfait la relation :

$$d\theta + \frac{1}{2}[\theta \wedge \theta] = 0 ,$$

que l'on obtient en remarquant que :
$\theta = V_k \otimes \theta^k$, $d\theta = V_k \otimes d\theta^k$ et $[\theta \wedge \theta] = [V_i, V_j] \otimes \theta^i \wedge \theta^j$.

**Sous-groupe à un paramètre**

Soit $G$ un groupe de Lie. Une courbe $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow G$ est appelée un **sous-groupe à un paramètre** de $G$ si

$$\phi(0) = e \ \text{ et } \ \phi(t)\phi(s) = \phi(t+s) \ , \ \forall \, t, s \in \mathbb{R} \ .$$

Il s'en suit que $\phi$ définit un homomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $G$ et est abélien même si $G$ ne l'est pas.

Etant donné un sous-groupe à un paramètre $\phi$ de $G$, il existe un champ de vecteurs $X$ invariant à gauche satisfaisant

$$\frac{d\phi^k(t)}{dt} = X^k(\phi(t)) \ .$$

Réciproquement un champ de vecteurs invariant à gauche $X$ sur $G$ définit un groupe à un paramètre de transformations $\sigma(t, g)$, tel que

$$\frac{\sigma(t, g)}{dt} = X \ \text{ et } \ \sigma(0, g) = g \ .$$

En posant $\phi(t) = \sigma(t, e)$, on définit ainsi un sous-groupe à un paramètre de $G$. On obtient ainsi une correspondance bijective entre les sous-groupes à un paramètre de $G$ et les champs de vecteurs invariants à gauche sur $G$.

**Application exponentielle**

Soit $G$ un groupe de Lie. **L'application exponentielle** $\exp : T_eG \longrightarrow G$ est définie pour tout vecteur $V \in T_eG$ par :

$$\exp V = \phi_V(1) ,$$

où $\phi_V$ est le sous-groupe à un paramètre de $G$ engendré par le champ de vecteurs invariant à gauche $X_V|g = L_{g*}V$.

Pour tout $V \in T_eG$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\exp(tV) = \phi_V(t) .$$

Considérons à présent le groupe de Lie $G = GL(n, \mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{G} = gl(n, \mathbb{R})$. Soit $\phi_A : \mathbb{R} \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$ défini par

$$\phi_A(t) = \exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} .$$

$\phi_A$ est un sous-groupe à un para'ètre de $G$ et l'application exponentielle est définie par :

$$\exp(A) = \phi_A(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A)^k}{k!} ;$$

c'est-à-dire qu'elle coincide avec l'exponentielle classique d'une matrice.

Pour $g \in G$, la courbe $t \longmapsto g\exp(tA)$ est un flow à travers $g$ et on a

$$\frac{d}{dt}\, g\exp(tA)|_{t=0} = L_{g*}A = X_A|g ,$$

où $X_A$ est le champ de vecteurs invariant à gauche engendré par $A$.
Pour un groupe de matrice, on a

$$L_{g*}A = X_A|g = gA \text{ (produit matriciel)} .$$

La courbe $t \longmapsto g\exp(tA)$ induit une application $\sigma_t : G \longrightarrow G$ définie par :

$$\sigma_t(g) = g\exp(tA) ,$$

que l'on peut aussi considérée comme une translation à droite

$$\sigma_t = R_{\exp(tA)} \ .$$

**Action d'un groupe de Lie sur une variété**

Soient $G$ un groupe de Lie et $M$ une variété. Une action de $G$ sur $M$ est une application différentiable $\sigma : G \times M \longrightarrow M$ telle que :

$$\sigma(e, p)) = p \ \text{ et } \ \sigma(g_1, \sigma(g_2, p)) = \sigma(g_1 g_2, p) \ , \ \forall \, p \in M \ , \ \forall \, g_1, g_2 \in G \ .$$

**Exemples**

1. Un flot (périodique) sur une variété $M$ est une action de $\mathbb{R}$ ($U(1)$ ou $SO(2)$) sur $M$.

2. Le groupe $GL(n, \mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{R}^n$ par l'action d'une matrice sur un vecteur. Les sous-groupes de $GL(n, \mathbb{R})$ agissent de la même façon sur $\mathbb{R}^n$ et parfois sur certaines sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Par exemple le groupe orthogonal $O(n)$ agit sur la sphère $S^{n-1}(r)$ par cette action.

3. Le groupe $SL(2, \mathbb{C})$ agit sur l'espace-temps de Minkowski $M_4$ de la façon suivante :
Pour $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in M_4$, on pose :

$$X(x) = x^k \sigma_k = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \ ,$$

où $\sigma_0$ est la matrice unité et, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les matrices de Pauli.

On dira qu'un groupe de Lie $G$ agit transitivement sur une variété $M$ par l'action $\sigma$ si

$$\forall \, p_1, p_2 \in M \ , \ \exists g \in G \ / \ \sigma(g, p_1) = p_2 \ .$$

On dira que l'action $\sigma$ du groupe de Lie $G$ sur $M$ est libre si

$$\exists \, p \in M \ / \ \sigma(g, p) = p \implies g = e \ .$$

l'action est dite effective si l'élément neutre $e \in G$ est le seul définissant une action triviale ; c'est-à-dire que

$$\sigma(g,p) = p \ , \ \forall \, p \in M \implies g = e \ .$$

Par exemple les translations à gauche et à droite sont des actions libres et transitives d'un groupe de Lie sur lui-même.

**Orbites et groupes d'isotropie**

Soient $G$ un groupe de Lie agissant sur une variété $M$ (par une action $\sigma$) et $p \in M$.
On appelle l'**orbite** de $p$ sous l'action $\sigma$ le sous-ensemble $G_p$ de $M$ défini par

$$G_p = \{\sigma(g,p) \ / \ g \in G\} \ .$$

L'orbite de tout point de $M$ est $M$ lui-même si l'action est transitive.
Aussi l'action de $G$ sur une orbite est toujours transitive.

**Exemples**

1. L'action induite par le flot périodique du champ de vecteurs
$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2$ n'est ni libre , ni effective (à cause de la périodicité).
L'orbite d'un point $(x,y) \neq (0,0)$ est le cercle $S^1$ centré à l'origine.

2. L'action de $O(n)$ sur $\mathbb{R}^n$ n'est pas transitive puisque deux vecteurs de normes différentes ne peuvent être reliés par une isométrie.
Par contre l'action de $O(n)$ sur $\mathbb{S}^{n-1}$ est transitive. L'orbite d'un point $x$ est la sphère de rayon $\|x\|$.

Etant donnée une action $\sigma$ de $O(n)$ sur $\mathbb{R}^n$, les orbites partitionnent $\mathbb{R}^n$ en sphères de différents rayons.
La relation définie par : $x \sim y \Leftrightarrow y = gx \ , \ g \in O(n)$ est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les orbites définies par les points de $\mathbb{R}^n$.
L'espace quotient $\mathbb{R}^n/O(n)$ est l'intervalle $[0,+\infty)$.

Le **groupe d'isotropie ou stabilisateur** d'un point $p \in M$ est le sous-ensemble $H(p)$ de $G$ défini par

$$H(p) = \{g \in G \;/\; \sigma(g,p) = p\} \;.$$

Si $G$ agit sur $M$ librement alors $H(p) = \{e\}$, pour tout point $p \in M$.

**Proposition**
Le groupe d'isotropie d'un point de $M$ est un sous-groupe de Lie de $G$.

Considérons l'action de $SO(3)$ sur $\mathbb{R}^3$. Par exemple le groupe d'isotropie du point $p = (0,0,1)$ est l'ensemble des rotations par rapport à l'axe $(Oz)$, qui est isomorphe à $SO(2)$.

Soient $G$ un groupe de Lie et $H$ un sous-groupe de Lie de $G$. L'espace quotient $G/H$ est muni d'une structure de variété différentiable (de dimension $\dim G - \dim H$) et est appelé **espace homogène**.
Supposons que $G$ agit transitivement sur une variété $M$. Alors le groupe d'isotropie $H(p)$, $p \in M$, est un sous-groupe de Lie de $G$ et $G/H(p)$ est un espace homogène. Sous certaines conditions $G/H(p)$ est homéomorphe à $M$.

Par exemple l'action de $SO(3)$ sur $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ permet de voir que $SO(3)/SO(2)$ est homéomorphe à $S^2$.
De façon générale $SO(n+1)/SO(n)$ est homéomorphe à $S^n$, $O(n+1)/O(n)$ est homéomorphe à $S^n$, $U(n+1)/U(n) \approx SU(n+1)/SU(n) \approx S^{2n+1}$.

**Champs de vecteurs induits par une action**

Notons $(g,x) \longmapsto gx$ l'action du groupe de Lie $G$ sur une variété $M$ et soit $V \in T_eG$.
On appelle champ de vecteur induit par $V$, le champ de vecteur $V^\sharp$ sur $M$ défini par

$$V^\sharp|_x = \frac{d}{dt}\exp(tV)x|_{t=0} \;.$$

**Exemples**

1. Considérons l'action de $SO(2)$ sur $\mathbb{R}^2$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in so(2)$.

On a : $\exp(tV) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ et $V^\sharp_{|(x,y)} - y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$.

2. Considérons l'action de $G = SO(3)$ sur $M = \mathbb{R}^3$. Une base de $T_eG$ est constituée par les rotations d'axe $(Ox)$, $(Oy)$ et $(Oz)$.
Notons-les $X_x$, $X_y$, $X_z$. On a :
$X_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , $X_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , $X_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Les champs de vecteurs induits par $X_x$, $X_y$ et $X_z$ sont respectivement :

$$X^\sharp_x = -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z}\ ,\ X^\sharp_{|y} = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\ \text{ et }\ X^\sharp_{|z} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}\ .$$

**Représentation adjointe**

On appelle **représentation adjointe** d'un groupe de Lie $G$, associée à un élément $a \in G$, l'homomorphisme $ad_a : G \longrightarrow G$ définie par :

$$ad_a(g) = aga^{-1}\ .$$

On a :

$$ad_{a^*}ad_{b^*} = ad_{ab^*} \ \text{ et }\ ad_{a^{-1*}}ad_{a^*} = \mathrm{id}_{T_eG}\ .$$

Notons $\mathcal{G} = T_eG$ et $Ad_a = ad_{a^*}|_{\mathcal{G}}$.
On obtient ainsi une application $Ad : G \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$, appelée **application adjointe de** $G$.
L'application adjointe vérifie les propriétés suivantes :

$$Ad_aAd_b = Ad_{ab} \ \text{ et }\ Ad_{a^{-1}} = Ad_a^{-1}$$

Soient $G$ un groupe de matrices, $g \in G$ et $V \in T_eG$.
Notons $\sigma_V(t) = \exp(tV)$ le flot engendré par $V$.
Alors la représentation adjointe induite par un élément $g \in G$ est donnée par :

$$ad_g(\exp(tV)) = g\exp(tV)g^{-1} = \exp(tgVg^{-1})$$

et l'application adjointe correspondante $Ad_g$ est donnée par :

$$Ad_g(V) = gVg^{-1} .$$

# Espaces fibrés

Les espaces fibrés offrent un cadre mathématique pour décrire beaucoup de phénomènes physiques comme la théorie de la relativité générale, et celle de jauge.

**Définition**
Un **espace fibré** est la donnée d'un quintuplet $(E, \pi, M, F, G)$, où :
- $E$ et une variété différentiable appelée **espace total**
- $M$ et une variété différentiable appelée **espace de base**
- $F$ et une variété différentiable appelée **fibre type**
- $\pi : E \longrightarrow M$ est une application surjective, appelée **projection**, telle que, pour tout $p \in M$, $\pi^{-1}(\{p\})$ soit difféomorphe à $F$.
- $G$ est un groupe de Lie, appelé *groupe structural*, qui agit à gauche sur la fibre type $F$
- Il existe un recouvrement ouvert $(U_i)_i$ de $M$ et une famile de difféomorphismes associés $(\phi_i)_i$, $\phi_i : U_i \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U_i)$ telle que, pour tout $(p, x) \in U_i \times F$, $\pi \circ \phi_i(p, x) = p$.

Les difféomorphismes $\phi_i$ sont appelés **trivialisations locales**, car $\phi_i^{-1}$ envoie $\pi^{-1}(U_i)$ sur le produit direct $U_i \times F$.

L'application $\phi_{i,p} : F \longrightarrow F$, définie par $\phi_{i,p}(x) = \phi_i(p, x)$, est un difféomorphisme. Si $U_i \cap U_j$ est non vide, les applications $t_{ij}(p) = \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p} : F \longrightarrow F$ appartiennent au groupe structural $G$.
Les applications induites $t_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$ sont appelées fonctions de transition, et on a entre les difféomorphismes $\phi_i$ et $\phi_j$ la relation :

$$\phi_j(p, x) = \phi_i(p, t_{ij}(p)x) \ .$$

Les fonctions de transition vérifient en outre les relations suivantes :
- $\forall\, p \in U_i \ , \ t_{ii}(p) = \mathrm{id}_F$.
- $\forall\, p \in U_i \cap U_j \ , \ t_{ij}(p)^{-1} = t_{ji}(p)$.
- $\forall\, p \in U_i \cap U_j \cap U_k \ , \ t_{ij}(p) \circ t_{jk}(p) = t_{ik}(p)$.

Si toutes les fonctions de transition coincident avec l'application identique, alors le fibré est dit trivial. Dans ce cas l'espace total $E$ est égal au produit $M \times F$.

La famille $(t_{ij})$ est appelée **cocycle** associé à la trivialisation $(U_i, \phi_i)_i$.

Dans la pratique l'espace fibré $(E, \pi, M, F, G)$ sera désigné par le diagramme $E \xrightarrow{\pi} M$ ou simplerment par son espace total $E$.

**Remarque**
La donnée d'une variété différentiable $M$, d'un recouvrement ouvert $(U_i)_i$ de $M$ et des fonctions de transition $t_{ij}$ (vérifiant les relations ci-dessus énumérées) permet de reconstructure l'espace total $E$ et la projection $\pi$ du fibré au-dessus de $M$.

On appelle **section du fibré**, toute application différentiable $s : M \longrightarrow E$ telle que $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$. Pour tout $p \in M$, $s(p)$ est un élément de la fibre $F_p = \pi^{-1}(p)$ au-dessus de $p$.
L'ensemble des sections du fibré $E$ est souvent noté $\Gamma(M, E)$ ou $\Gamma(E)$.
La restriction d'une section $s$ de $E$ à un sous-ensemble $U \subset M$ est appelée une section locale définie sur $U$ et l'ensemble de telles sections est noté $\Gamma(U, E)$.

**Sous-fibrés**
On dira qu'un espace fibré $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ est un sous-fibré d'un espace fibré $E \xrightarrow{\pi} M$ si $P'$ est une sous-variété de $P$, $M'$ une sous-variété de $M$ et si la restriction de $\pi$ à $M'$ coincide avec $\pi'$.

**Exemple** : le fibré tangent
Soit $M$ une variété différentiable de dimension $m$. Le **fibré tangent** au-dessus de $M$ est l'espace fibré dont l'espace de base est $M$ et l'espace totale $TM$ est la réunion de tous les espaces tangents à $M$ ; i.e : $TM = \bigcup\limits_{p \in M} T_pM$.
Soit $(U_i)_i$ un recouvrement ouvert de $M$. Si $(x^k = \phi_k(p))_k$ est un système de coordonnées sur $U_i$, un élément de $TU_i = \bigcup\limits_{p \in U_i} T_pM$ est identifié à un couple $(p, V)$, où $p \in U_i$ et $V = v^k(p) \frac{\partial}{\partial x^k}_{|p} \in T_pM$.
Puisque $U_i$ est homéomorphe à un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^m$ et chaque espace tangent $T_pM$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^m$, on peut identifier $TU_i$ au produit $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ ; l'identification étant donnée par $(p, V) \in TU_i \longmapsto (x^k(p), v^k(p))$.
Aussi l'identification de tout élément $u \in TU_i$ à un couple $(p, V)$, où $p \in U_i$ et $V \in T_pM$, permet de définir de façon naturelle la projection $\pi : TU_i \longrightarrow U_i$ en posant, pour tout point $u = (p, V) \in TU_i$, $\pi(u) = p$.

Nous avons alors, pour tout $p \in U_i$, $\pi^{-1}(\{p\}) = T_pM$ ; i.e que l'espace tangent en $p$ est la fibre au-dessus de $p$. Puisque tous les espaces tangents sont isomorphes à $\mathbb{R}^m$, la fibre type du fibré tangent $TM$ est $\mathbb{R}^m$.
Pour déterminer le groupe structural, considérons un autre ouvert $U_j$ tel que $U_i \cap U_j$ soit non vide, et soit $(y^l = \psi_l(p))_l$ un système de coordonnées sur $U_j$. Un vecteur tangent à $M$ au point $p \in U_i \cap U_j$, $V \in T_pM$, s'écrit

$$V = v^k(p) \frac{\partial}{\partial x^k}_{|p} = \tilde{v}^l(p) \frac{\partial}{\partial y^l}_{|p} .$$

On a alors

$$\tilde{v}^l = \frac{\partial y^l}{\partial x^k}(p) v^k .$$

Pour que $(x^k)_k$ et $(y^l)_l$ soient de bons systèmes de coordonnées, il faut et il suffit que la matrice de passage $(G^l_k) = (\frac{\partial y^l}{\partial x^k})$ soit régulière, c'est-à-dire quelle définisse un élément du groupe linéaire $GL(m, \mathbb{R})$, qui est alors le groupe structural du fibré tangent $TM$.

**Remarque**
De part sa définition, la projection $\pi$ peut être définie sans référence à un système de coordonnées particulier, car la relation $\pi(u) = p$, pour $u = (p, V)$, $p \in M$ , $V \in T_pM$ ne dépend pas d'une carte particulière. On peut donc définir globalement la projection $\pi : TM \longrightarrow M$.

Un section du fibré tangent est une application $C^\infty$, $s : M \longrightarrow TM$, telle que $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$. Il en résulte donc que les sections du fibré tangent sont les champs de vecteurs sur $M$.

**Exemple 2** : fibrés au-dessus de $S^1$.
Considérons un espace fibré $E$ au-dessus de $S^1$, $E \xrightarrow{\pi} M$, de fibre type $[-1\ ,\ 1]$ et soit $(U_1, U_2)$ le recouvrement ouvert de $S^1$ avec $U_1 = ]0\ ,\ 2\pi[$ et $U_2 = ]-\pi\ ,\ \pi[$. Notons $A = ]0\ ,\ \pi[$ et $B = ]\pi\ ,\ 2\pi[$ les deux parties de $U_1 \cap U_2$. Les trivialisations locales $\phi_1$ et $\phi_2$ sont données, pour $\theta \in A$ et $t \in F$, par :

$$\phi_1^{-1}(u) = (\theta, t) \;\text{ et }\; \phi_2^{-1}(u) = (\theta, t) .$$

La fonction de transition $t_{12}(\theta)$, $\theta \in A$, est l'application identique de $F$.
Pour $\theta \in B$, on a deux possibilités :

$$(1) \quad \phi_1^{-1}(u) = (\theta, t) \;\text{ et }\; \phi_2^{-1}(u) = (\theta, t)$$

ou

$$(2) \quad \phi_1^{-1}(u) = (\theta, t) \;\text{ et }\; \phi_2^{-1}(u) = (\theta, -t)\ .$$

Pour le premier cas (1), la fonction de transition $t_{12}(\theta)$ est l'identité et deux morceaux de fibrés locaux sont recollés ensemble pour former un cylindre.
Dans le second cas, on a $t_{12}(\theta) : t \longmapsto -t$, et nous obtenons la bande de Möbius.
Le cylindre a un groupe structural trivial $G = \{\mathrm{id}_F\}$ tandis que le groupe structural de la bande de Möbius est $G = \{\mathrm{id}_F, g\} \equiv \mathbb{Z}_2$, avec $g : t \longmapsto -t$.
Le cylindre est un fibré trivial $S^1 \times F$ au-dessus de $S^1$ tandis que la bande de Möbius est un fibré non trivial au-dessus de $S^1$.

Soient $E \xrightarrow{\pi} M$ et $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ deux espaces fibrés. Une application différentiable $\bar{f} : E \longrightarrow E'$ est appelée **application fibrée** si elle envoie chaque fibre $F_p$ de $E$ sur une fibre $F'_q$ de $E'$. Dans ce cas elle induit de façon naturelle une application différentiable $f : M \longrightarrow M'$ telle que $f(p) = q$ ; ie telle que $f \circ \pi = \pi' \circ \bar{f}$.

Deux espaces fibrés ayant le même espace de base sont dits **équivalents** s'il existe entre les deux une application fibrée qui est un difféomorphisme et dont l'application induite sur la variété de base est l'identité.

Soient $E \xrightarrow{\pi} M$ un espace fibré, $N$ une variété différentiable et $f : N \longrightarrow M$ une application.
On appelle **fibré pull-back** de $E$ par $f$, l'espace fibré $f^*E \xrightarrow{f^*\pi} N$ au-dessus de $N$ dont l'espace total est

$$f^*E = \{(q, V) \in N \times E \;/\; f(q) = \pi(V)\}\ .$$

La projection $f^*\pi$ est définie par $(f^*\pi)(q, V) = q$ et l'espace fibre type est le même que celui du fibré $E$.
On a entre les fibrés $f^*E$ et $E$ une application fibrée $\bar{f}$, définie par $\bar{f}(q, V) = V$, qui vérifie bien la relation de commutation $f \circ (f^*\pi) = \pi \circ \bar{f}$.
Soient $(U_i, \phi_i)_i$ une trivialisation locale de $E$ et $V \in E$ tel que $\pi(V) = f(q)$, $q \in N$.
Si $\phi_i^{-1}(V) = (f(q), x_i)$, alors la famille $(f^{-1}(U_i), \psi_i)$, avec $\psi_i^{-1}(q, V) = (q, x_i)$, est une trivialisation locale de $f^*E$.
Les fonctions de transition $t^*_{ij}$ sont définies, pour $f(q) \in U_i \cap U_j$, par $t^*_{ij}(q) = t_{ij}(f(q))$.

## Fibrés vectoriels

Un **fibré vectoriel** est un espace fibré dont la fibre type est un espace vectoriel et tel que les fibres au-dessus des points de base soient isomorphes à la fibre type. Dans le cas où la fibre type est un espace vectoriel réel (resp. complexe) de dimension finie $n$, nous le considérons comme $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) et nous dirons que le fibré vectoriel est de rang fini $n$. Dans ce cas le groupe structural est $G(n, \mathbb{R})$ ($G(n, \mathbb{C})$).

Un fibré vectoriel réel de rang fini est dit orientable s'il possède une trivialisation dont les fonctions de transition ont des déterminants positifs.

Si la fibre type est de dimension 1, alors le fibré vectoriel est appelé ligne fibrée et le groupe structural est $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{C}^*$.
Par exemple le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$ est une ligne fibré triviale et la bande de Möbius est une ligne fibrée non trivale

**Exemple**
De façon générale, l'espace tangent à une variété différentiable $M$ de dimension $m$ est un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^m$.

Examinons $TM$ avec $M = S^2$.
Soient $U_S = S^2 - \{S\}$ et $U_N = S^2 - \{N\}$ un recouvrement ouvert de $S^2$, avec $S = (0, 0, -1)$ (pôle sud) et $N = (0, 0, 1)$ (pôle nord). Notons $(X, Y)$ et $(U, V)$ les coordonnées stéréographiques respectivement sur $U_S$ et $U_N$.
Ces deux systèmes de coordonnées sont liés par la relation :

$$U = \frac{X}{X^2 + Y^2} \text{ et } V = -\frac{Y}{X^2 + Y^2} \, .$$

Soient $u \in TS^2$ tel que $\pi(u) = p \in U_N \cap U_S$ et, $\phi_N$ et $\phi_S$ les trivialisations locales respectives avec $\phi_N^{-1}(u) = (p, u_N^l)$ et $\phi_S^{-1}(u) = (p, u_S^l)$.
En posant $X = r \cos\theta$ et $Y = r \sin\theta$, la fonction de transition $t_{SN}$ est donnée par

$$t_{SN}(p) = \frac{\partial(U, V)}{\partial(X, Y)} = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

Et $t_{NS}(p) = T_{SN}^{-1}(p)$.

Supposons que $M$ soit une variété différentiable plongée dans $\mathbb{R}^{m+k}$ et notons, pour tout $p \in M$, $N_pM$ le sous-espace (isomporphe à $\mathbb{R}^k$) orthogonal à $T_pM$ dans $\mathbb{R}^{m+k}$.
Alors $NM = \bigcup\limits_{p\in M} N_pM$ est un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^k$ au-dessus de $M$ appelé **fibré normal**.
Par exemple le fibré normal à la sphère $S^2$ (plongée dans $\mathbb{R}^3$) peut être considéré comme $S^2$ percée sur toute sa surface par des droites perpendiculaires. $NS^2$ est un fibré vectoriel trivial $S^2 \times \mathbb{R}$.

**fibrés cotangents, fibrés duaux**
Soit $M$ une variété différentiable de dimension $m$. Alors la reunion de tous les espaces cotangents à $M$, $T^*M = \bigcup\limits_{p\in M} T_p^*M$, est un fibré vectoriel, appelé **fibré cotangent** à $M$, de même fibre type et de même groupe structural que le fibré tangent $TM$.

Les sections du fibré cotangent sont les 1-formes sur $M$ ; ie :
$\Gamma(M, T^*M) = \Omega^1(M)$.

De façon générale, étant donné un fibré vectoriel $E \xrightarrow{\pi} M$ de fibre type $F$, on appelle **fibré dual** de $E$, le fibré vectoriel $E^*$ au-dessus de $M$, de fibre type l'espace vectoriel $F^*$ des formes linéaires sur $F$ et dont les fonctions de transitions sont construites de "façon duale" à celles de $E$.

Un **homomorphime fibré** entre deux fibrés vectoriels $E$ et $E'$ de même base est une application fibrée entre $E$ et $E'$ qui préserve les fibres et dont les restrictions aux fibres sont linéaires.
L'ensemble des homorphismes fibrés entre $E$ et $E'$ est un espace fibré noté $Hom(E, E')$.

**Fibré produit cartésien**
On appelle fibré produit cartésien de deux fibrés vectoriels $E \xrightarrow{\pi} M$ et $E' \xrightarrow{\pi'} M'$, de fibres types $F$ et $F'$, le fibré vectoriel d'espace total $E \times E'$, de base $M \times M'$, de fibre type $F \times F'$ (ou $F \oplus F'$) et dont la projection $\pi \times \pi'$ est définie par $\pi \times \pi'(u, u') = (p, p')$, si $\pi(u) = p$ et $\pi'(u') = p'$.
La fibre au-dessus de $(p, p') \in M \times M'$ est $F_p \oplus F'_{p'}$.
Les cartes fibrées sont de la forme $(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta)$, où $(U_\alpha, \phi_\alpha)$ et $(V_\beta, \psi_\beta)$

sont des cartes fibrées sur $E$ et $E'$ resp, et $\phi_\alpha \times \psi_\beta$ est définie par

$$(\phi_\alpha \times \psi_\beta)[(p,p'),(u,u')] = (\phi_\alpha(p,u), \psi_\beta(p',u')) \ , \ u \in F_p \ , \ u' \in F'_{p'} \ .$$

Par exemple si $M = M_1 \times M_2$, alors $TM = TM_1 \times TM_2$.

**Fibré somme de Whitney**
Le fibré somme de Whitney $E \oplus E'$ de deux fibrés vectoriels de même base $E \xrightarrow{\pi} M$ et $E' \xrightarrow{\pi'} M$, est le fibré pull-back du fibré produit $E \times E'$ par l'application $f : p \in M \longmapsto (p,p) \in M \times M$.
Son espace total est alors
$E \oplus E' = \{(u,u') \in E \times E' \ / \ \pi \times \pi'(u,u') = (p,p) \ , \ \pi(u) = p\}$.
Son fibre type est $F \oplus F'$ et ses fonctions de transition $T_{ij}$ sont des matrices carrées d'ordre $(\dim F + \dim F')$ de la forme

$$T_{ij}(p) = \begin{pmatrix} t_{ij}(p) & 0 \\ 0 & t'_{ij}(p) \end{pmatrix} \ ,$$

où $t_{ij}$ et $t'_{ij}$ sont les fonctions de transition sur $E$ et $E'$ resp.
Par exemple $TS^2 \oplus NS^2$ est un fibré trivial au-dessus de $S^2$, de fibre type $\mathbb{R}^3$.

**Fibré produit tensoriel**
Le fibré produit tensoriel $E \otimes E'$ de deux fibrés vectoriels de même base $E \xrightarrow{\pi} M$ et $E' \xrightarrow{\pi'} M$, de fibres $F$ et $F'$, est le fibré au-dessus de $M$ de fibre type $F \otimes F'$ ; la fibre au-dessus d'un point $p \in M$ étant $F_p \otimes F'_p$.
Les trivialisations locales de $E \otimes E'$ sont données par les produits tensoriels des trivialisations locales de $E$ et $E'$, de même que les fonctions de transition.
Si $E$ et $E'$ sont de rangs finis $r$ et $r'$, alors $E \otimes E'$ est de rang fini $rr'$.

**Remarque** : $Hom(E,E') = E^* \otimes E'$.

**Sections de fibrés vectoriels**
Soit $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibré vectoriel.
On définit sur $\Gamma(M,E)$ une addition et une multiplication externe en posant, pour $s, s' \in \Gamma(M,E)$, $f \in C^\infty(M)$ et $p \in M$,

$$(s+s')(p) = s(p) + s'(p) \ \text{ et } \ (fs)(p) = f(p)s(p) \ .$$

La section nulle $s_0$ de $E$ est la section qui à tout point $p \in M$ associe le vecteur nul de $F_p$.

Si $s_1, \cdots, s_n$ sont $n$ sections des fibrés vectoriels (de même base) $E_1, \cdots, E_n$ resp., on peut définir à partir de leur produit tensoriel les sections suivantes :

$$\text{(symmétrique)} \quad s_1 \otimes_s s_2 \otimes_s \cdots \otimes_s s_n := \frac{1}{k!} \sum_{\alpha \in \Sigma_n} s_{\alpha(1)} \otimes \cdots \otimes s_{\alpha(n)}$$

et

$$\text{(antisymmétrique)} \quad s_1 \wedge s_2 \wedge \cdots \wedge s_n := \frac{1}{k!} \sum_{\alpha \in \Sigma_n} (-1)^{sign(\alpha)} s_{\alpha(1)} \otimes \cdots \otimes s_{\alpha(n)} \ ,$$

où $\Sigma_n$ est l'ensemble des permutations de $n$ éléments et $sign(\alpha)$ est la signature de la permutation $\alpha$.

Soit $M$ une variété différentiable. Notons
$\otimes^r TM = \underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_{r fois}$ et $\otimes^s T^*M = \underbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}_{s fois}$.
Toute section de $\otimes^r TM$ est appelée un champ de tenseurs $r$-contravariant sur $M$ et toute section de $\otimes^s T^*M$ est appelée un champ de tenseurs $s$-covariant sur $M$. On appelle champ de tenseurs de type $(r, s)$ (ou $(r, s)$-tenseur) sur $M$ toute section de $(\otimes^r TM) \otimes (\otimes^s)T^*M$.
Par exemple un champ de vecteurs sur $M$ est un champ de tenseurs de type $(1, 0)$ (ou 1-contravariant) sur $M$ et un $p$-forme sur $M$ est un champ de tenseurs p-covariant (ou de type $(0, p)$) antisymmétrique sur $M$.
En coordonnées locales, les composantes d'un tenseur $T$ de type $(r, s)$ sont notées $T^{j_i \cdots j_s}_{i_1 \cdots i_r}$.

Si $f : M \longrightarrow N$ est une application entre deux variétés différentiables et $T$ est un champ de tenseur $s$-covariant sur $N$, on définit sur $M$ un champ de tenseur $s$-covariant, appelé pull-back de $T$ par $f$, en posant

$$(f^*T)_p(X_1, \cdots, X_s) := T_{f(p)}(f_{*p}(X_1), \cdots, f_{*p}(X_s)) \ , \ \forall \ X_1, \cdots, X_s \in T_pM \ .$$

On a $f^*(T_1 \otimes T_2) = f^*(T_1) \otimes f^*(T_2)$.

**Repères**
Soit $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibré vectoriel de fibre type $\mathbb{R}^k$(ou $\mathbb{C}^k$).
Si $U_i$ est un ouvert d'une carte, alors $\pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{R}^k$.
A chaque point $p \in U_i$ on peut donc associer $k$ vecteurs linéairement indépendants $\sigma_1(p), \cdots, \sigma_k(p)$, définissant ainsi $k$ sections $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$ "linéairement indépendants" au-dessus de $U_i$.
Ces sections constituent un repère au-dessus de $U_i$.
Nous avons une correspondance naturelle entre la fibre $F_p$ au-dessus d'un point $p \in U_i$, et $F = \mathbb{R}^k$, qui à tout "vecteur" $V = v^\alpha \sigma_\alpha(p) \in F_p$ associe $(v^\alpha)_\alpha \in \mathbb{R}^k$.

Si $M$ est une variété de dimension $m$ et $(x^\alpha)_\alpha$ est un système de coordonnées sur un ouvert $U$ d'une carte de $M$, un repère naturel de $TM$ au-dessus de $U$ est donné par $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m})$.
Le repère naturel de $TM$ n'est pas défini globalement au-dessus de $M$, sauf si $TM$ est trivial ; ie : si $TM = M \times \mathbb{R}^m$.

## Fibrés principaux

Un fibré principal est un espace fibré $P \xrightarrow{\pi} M$ dont la fibre type $F$ coincide avec le groupe structural $G$. On le note souvent $P(M, G)$ et on l'appelle aussi $G$-fibré au-dessus de $M$.
On sait qu'une fonction de transition agit à gauche sur la fibre type. Mais on peut aussi définir une action à droite de $G$ sur $P$.
En effet soit $\phi_i : U_i \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U_i)$ une trivialisation locale donnée par $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$, où $u \in \pi^{-1}(U_i)$ et $p = \pi(u)$.
L'action à droite de $G$ sur $\pi^{-1}(U_i)$ est définie, pour tous $a \in G$, $u \in \pi^{-1}(p)$, par

$$\phi_i^{-1}(ua) = (p, g_i a) \ ; \ \text{ soit : } \ ua = \phi_i(p, g_i a) \ .$$

Puisque l'action à droite commute avec l'action à gauche, la définition précédente est en fait indépendante de la trivialisation choisie.
En effet, pour $p \in U_i \cap U_j$, on a

$$ua = \phi_j(p, g_j a) = \phi_j(p, t_{ji}(p) g_i a) = \phi_i(p, g_i a) \ .$$

L'action à droite, souvent notée $P \times G \longrightarrow P$ ou $(u, a) \longmapsto ua$, est transitive (et aussi libre) car $G$ agit sur lui-même de façon transitive à droite et $F_p = \pi^{-1}(p)$ est difféomorphe à $G$.
Ainsi Si $\pi(u) = p$, $\pi^{-1}(p)$ est l'orbire de $u$ sous l'action de $G$. .

Etant donné une section $\sigma_i$ au-dessus de $U_i$, il existe une trivialisation locale $\phi_i : U_i \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U_i)$, dite canonique, telle que, pour tout $p \in U_i$, $\phi(p, e) = \sigma_i(p)$, où $e$ est l'élément neutre de $G$.
Il s'en suit que, pour tout $g \in G$, $\phi_i(p, g) = \sigma_i(p)g$.

**Exemples**
1. Le fibré des repères linéaires.
Soit $M$ une variété différentiable de dimension $m$. En chaque point $p \in M$ nous avons un espace tangent $T_pM$ et nous pouvons considérer l'ensemble $C_p$ de tous les repères en $p$.
Notons $P = \bigcup\limits_{p \in M} C_p$ l'ensemble de tous les repères de $M$.
Les transformations permettant de passer d'un repère à un autre en un point fixé $P$ appartiennent au groupe linéaire $GL(m)$, qui agit aussi de façcon transitive sur chaque $C_p$. Aussi étant donné un repère $\sigma \in C_p$, tout élément $g \in GL(m)$ définit un nouveau repère $z = \sigma g$, et réciproquement tout nouveau repère $z \in C_p$ détermine un unique élément $g \in GL(m)$ tel que $z = \sigma g$.
Cette correspondance entre $C_p$ et $GL(m)$ est bien un difféomorphisme.
Aussi l'application $\pi : P \longrightarrow M$ qui, à tout repère $\sigma \in C_p$ associe le point de base $p$, est une surjection et les conditions de trivialité locales sont vérifiées.
En conclusion $P = \bigcup\limits_{p \in M} C_p \xrightarrow{\pi} M$ est un fibré principal de groupe structural $GL(m)$, appelé **fibré des repères linéaires de** $M$.
Une section locale de ce fibré n'est rien d'autre qu'un repère mobile choisi dans le domaine d'un ouvert de $M$ et une fonction de transition est un changement de repère.

2. Soit $P$ un fibré principal de fibre $U(1)$ au-dessus de $S^2$.
Soit $(U_N, U_S)$ un recouvrement ouvert de $S^2$, où $U_N$ et $U_S$ désignent les hémisphères nord et sud resp.
On a $U_N = \{(\theta, \varrho) \ / \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2-\varepsilon} \ , \ 0 \leq \varrho \leq 2\pi\}$ et
$U_S = \{(\theta, \varrho) \ / \ \frac{\pi}{2+\varepsilon} \leq \theta \leq \pi \ , \ 0 \leq \varrho \leq 2\pi\}$.
L'intersection $U_N \cap U_S$ est la bande de l'équateur

$\{(\theta, \varrho) \;/\; \frac{\pi}{2+\varepsilon} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2-\varepsilon} \;,\; 0 \leq \varrho \leq 2\pi\}$.
Soient $\phi_N$ et $\phi_S$ des trivialisations locales telles que

$$\phi_N^{-1}(u) = (p, \mathrm{e}^{i\alpha_N}) \;\text{ et }\; \phi_S^{-1}(u) = (p, \mathrm{e}^{i\alpha_S}) \;,\; p = \pi(u) \;.$$

Définissons la fonction de transition $T_{NS}(p)$ sous la forme $\mathrm{e}^{in\varrho}$, où $n$ est un entier choisi de façon à ce que $T_{NS}(p)$ soit défini uniquement sur la bande.
Les deux systèmes de coordonnées sont liés par la relation

$$\mathrm{e}^{i\alpha_N} = \mathrm{e}^{in\varrho}\,\mathrm{e}^{i\alpha_S} \;.$$

Si $n = 0$, la fonction de transition est l'élément unité de $U(1)$ et alors le fibré principal est trivial ; ie. $P = S^2 \times S^1$.
Si $n \neq 0$, le $U(1)$-fibré $P$ est tordu.
La projection $\pi : S^3 \longrightarrow S^2$, encore appelée **application de Hopf**, est définie par

$$\pi(x, y, z, t) = [2(xz + yt), 2(yz - xt), (x^2 + y^2 - z^2 - t^2)] \;.$$

Puisque $U(1)$ est un groupe abélien, les actions à gauche et à droite sont équivalentes. Sous l'action à droite $g = \mathrm{e}^{i\Lambda}$, on a

$$\phi_N^{-1}(ug) = (p, \mathrm{e}^{i\alpha_N + \Lambda}) \;\text{ et }\; \phi_S^{-1}(ug) = (p, \mathrm{e}^{i\alpha_S + \Lambda}) \;.$$

L'action à droite correspond à une transformation de jauge sur $U(1)$.

3. Soit $H$ un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie $G$. Alors $G$ est un fibré principal de fibre type $H$ et de base $G/H$.

## Fibrés associés

Soit $P(M, G)$ un fibré principal, $G$ agissant à gauche sur une variété $F$.
Considérons une action de $G$ sur $P \times F$ qui associe à tous $g \in G$ et $(u, f) \in P \times F$ l'élément $(ug, g^{-1}f) \in P \times F$.
En identifiant les couples $(u, f)$ et $(ug, g^{-1}f)$ ont définit ainsi une relation d'équivalence sur $P \times F$.
L'ensemble des classe d'équivalence $E$ est un fibré au-dessus de $M$, de fibre type $F$, appelé fibré associé au fibré principal $P$.
Si $F$ est un espace vectoriel, alors le fibré associé est un fibré vectoriel appelé fibré vectoriel associé.

Notons $\varrho$ de l'action de $G$ sur $F$.
La projection $\pi_E$ du fibré associé $E$ est définie par la relation $\pi_E(u, f) = \pi(u)$, qui définit bien $\pi_E$ car $\pi_E(ug, \varrho(g)^{-1}f) = \pi(ug) = \pi_E(u, f)$.
Les fonctions de transition sont données par $\varrho(t_{ij}(p))$, où $t_{ij}(p)$ sont les fonctions de transition du fibré principal $P$.

Réciproquement à tout fibré vectoriel $E \xrightarrow{\pi} M$ de rang $n$ est associé un fibré principal $P(E)$ au-dessus de $M$, de groupe structural $G = GL(n, \mathbb{R})$ (ou $GL(n, \mathbb{C})$).

Par exemple si $M$ une variété différentiable de dimension $m$, le fibré des repères linéaires de $M$ est un fibré principal associé au fibré tangent $TM$.

**Trivialité d'un fibré** :
Un fibré trivial $E = M \times F$ admet des (une infinité) sections globales, car tout difféomorphisme de $M \times F \longrightarrow E$ induit une section globale sur $E$.
Réciproquement l'existence de sections globales sur un fibré principal assure qu'il est trivial.
En effet soient $P(M, G)$ un fibré principal et $\sigma \in \Gamma(M, P)$ une section globale. Pour $p \in M$ et $a \in G$, $s(p)a \in \pi^{-1}(p)$.
Puisque l'action à droite est libre et transitive, tout élément $u \in P$ peut s'écrire de façon unique $u = s(p)a$, pour un certain $(p, a) \in M \times G$.
L'application $f : P \longrightarrow M \times G$ telle que $f(u) = (p, a)$, si $u = s(p)a$, est bien un homéomorphisme ; ce qui prouve que $P$ est trivial.

L'existence de section globale n'assure la trivialité que si le fibré est principal.

Dans le cas des fibrés vectoriels , il existe toujours des sections globales (par exemple la section nulle) même si le fibré n'est pas trivial.
En fait l'existence d'une section globale sur le fibré principal associé équivaut à l'existence de $n$ (rang du fibré) sections globales linéairement indépendantes ; et ceci assure la trivialité du fibré.
Plus précisément, un fibré vectoriel est trivial si et seulement si son fibré principal associé est trivial.

Une variété est dite parellélisable si son fibré tangent est trivial.
De façon général, les groupes de Lie sont parallélisables, car la donnée d'une base de son algèbre de Lie détermine $n$ (dimension du groupe) champs de

vecteurs indépendants (les champs invariants à gauche associés) ; ce qui revient aussi à dire que le fibré principal des repères sur le groupe de Lie (fibré principal associé à l'algèbre de Lie, de groupe structural $GL(n)$) admet une section globale.
Les sphères $S^0, S^1, S^3, S^7$ sont aussi parallélisables ($S^7$ n'est pas un groupe de Lie).
L'espace homogène $SU(4)/H$, où $H$ est le sous-groupe de $SU(4)$ isomorphe à $SU(2)$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, $A \in SU(2)$, est parallélisable.

## Sous-espace des vecteurs verticaux d'un fibré

Soit $P = P(M, G)$ un fibré principal. Il est en particulier une variété, et en tout point $z \in P$, nous pouvons considérer l'espace tangent $T_zP$ qui est un espace vectoriel de dimension $m + n$, si $M$ est de dimension $m$ et $G$ de dimension $n$.
Notons $\pi(z) = p \in M$. La fibre $F_p = \pi^{-1}(p)$ étant une sous-variété de $P$, considérons l'espace $V_zP = T_zF_p$, tangent à $F_p$ au point $z$.
$V_zP$ est un sous-espace vectoriel de $T_zP$, de dimension $n$, appelé espace tangent vertical au point $z$ (avec $\pi(z) = p$).

En imaginant $P$ comme le fibré principal des repères linéaires de $M$, un vecteur de l'espace tangent $T_zP$ peut être perçu comme un déplacement infinitésimal d'un repère ; un tel déplacement pouvant se faire en tournant le repère sans changer son origine ou avec déplacement de son origine. Les déplacements verticaux du repère $z \in P$, correspondent à des mouvements de $z$ dans sa fibre : on ne change pas le point de base $p = \pi(z)$.
Ainsi les vecteurs de $V_zP$ (vecteurs verticaux en $z$ tel que $\pi(z) = p$) correspondent à des déplacements infinitésimaux du repère $z$ qui n'entrainent aucun déplacement de l'origine $p = \pi(z)$.
Le groupe $G$ agissant à droite sur $P$, on peut définir des champs fondamentaux à droite $e_\alpha$ associés aux éléments $X_\alpha$ de l'algèbre de Lie de $G$, $Lie(G)$.
Par construction $e_\alpha(z)$ ($z \in P$), est un vecteur vertical au point $z$ et la famille $(e_1(z), e_2(z), \cdots, e_n(z))$ constitue une base de l'espace vectoriel $V_zP$.

Si $z' = z.g$ désigne l'élément (le repère) de $P$ issu de $z$ par l'action (rotation) de $g \in G$, la donnée d'une section (locale) $\sigma : p \in M \longmapsto \sigma(p) \in P$ permet une trivialisation locale de $P$ et aussi d'identifier la fibre $F_p$ avec le groupe $G$ en associant au point $z \in F_p$ l'élément $g_\sigma \in G$ défini par la relation $z = \sigma(p)g_\sigma$.
On peut ainsi identifier $G$ avec $F_p$ (on a maintenant une origine sur $F_p$) et l'espace vertical $T_{\sigma(p)}F_p$ avec l'algèbre de Lie $Lie(G)$ du groupe $G$.

**Remarque**
Soit $X \in Lie(G)$. L'application définie, via l'action à droite, par

$$\gamma : t \in \mathbb{R} \longmapsto z\exp(tX) \ ,$$

est une courbe de $P$ contenue dans la fibre $G_z = F_z$ avec $\gamma(0) = z$.
Considérons le vecteur $\vec{X} \in V_zP$ défini, pour toute fonction $f \in C^\infty(P)$, par

$$\vec{X}f(u) = \frac{d}{dt}f(z\exp(tX))|_{t=0} \ .$$

Le champ de vecteurs ainsi construit est appelé champ de vecteur fondamental engendré par $X$ et l'application $X \in Lie(G) \longmapsto \vec{X}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
On a

$$[\vec{X}\ ,\ \vec{Y}] = \overrightarrow{[X\ ,\ Y]}$$

Et

$$\pi_*\vec{X} = 0\ ,\ \forall\ \vec{X} \in V_zP\ .$$

# Connexions dans un fibré

Une connexion dans un fibré principal peut être considérée comme un “moyen” d'associer à tout déplacement infinitésimal dans l'espace de base un déplacement dans le fibré, ou de façon équivalente d'associer à tout chemin dans l'espace de base un certain chemin dans le fibré.

**Distributions horizontales équivariantes**
Soient $P = P(M,G)$ un fibré principal et $z \in P$ avec $\pi(z) = p \in M$. On sait que l'espace tangent vertical $V_zP = T_zF_p$ est un sous-espace vectoriel de l'espace tangent $T_zP$ à $P$ au point $z$.

Une connexion de $P$ est la donnée de façon différentiable et équivariante, pour tous $p \in M$ et $z \in F_p$, d'un sous-espace vectoriel $H_zP$ (appelé horizontal) supplémentaire de $V_zP$ dans $T_zP$.
L'équivariance est sous-entendue sous l'action du groupe $G$ ; c'est-à-dire que nous devons avoir $H_{zg}P = H_zP.g$, pour tout $g \in G$.
Le choix, en tout point $z \in P$ avec $\pi(z) = p$, d'un tel espace vectoriel $H_zP$ tel que $T_zP = V_zP \oplus H_zP$, est appelé distribution horizontale.
Une connexion dans un fibré principal est donc la donnée d'une distribution horizontale équivariante sous l'action du groupe structural.

**Forme de connexion**
Soit $P = P(M,G)$ un fibré principal sur lequel est donnée une connexion. Soient $e \in P$ avec $\pi(z) = p \in M$. $(X_\alpha)_\alpha$ une base de $Lie(G)$ et $T_zP = V_zP \oplus H_zP$ une décomposition en un sous-espace vertical $V_zP$ engendré par les champs fondamentaux $\hat{X}_\alpha$ et un sous-espace horizontal $H_zP$ défini par la donnée de la connexion.
Posons :

$$\omega_z(\hat{X}_\alpha(z)) = X_\alpha \ ; \ \ker \omega_z = H_zP \ .$$

La forme de connexion $\omega$ est définie, pour tout $z \in P$, par $\omega(z) = \omega_z$.
C'est une forme sur $P$ et à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe structural $Lie(G)$.
Tout champ de vecteurs $Z \in TP$ s'ecrit, au point $z \in P$,

$$Z = Z^\alpha \hat{X}_\alpha(z) + V^h \ \text{ avec } \ V^h \in H_zP \ .$$

on a donc

$$\omega(Z) = Z^\alpha X_\alpha \ .$$

La distribution horizontale étant équivariante, pour tout $z \in P$ et tout $g \in G$,

$$\ker \omega_{zg} = (\ker \omega_z) g \ .$$

**Remarque**
La donnée d'une distribution horizontale équivariante permet de définir la forme de connexion. Réciproquement la “forme de connexion” permet de définir la connexion.

La forme de connexion est une projection de $TzP$ sur sa composante verticale $V_zP \approx Lie(G)$, et on a

$$\omega(\vec{A}) = A \ , \ \forall \ A \in Lie(G) \ .$$

Si $X \in H_zP$ et $Y \in V_zP$, alors $[X \ , \ Y] \in H_zP$

**Le potentiel de jauge**

Le fait que tout fibré principal soit localement trivial permet, moyennant le choix d'une section locale, d'écrire la forme de connexion $\omega$ comme une forme sur $M$ et non sur le fibré principal $P$.

Soit donc $\sigma : M \longrightarrow P$ une section locale. Posons, pour tout $v \in TM$ et tout $p \in M$,

$$^{\sigma}\mathcal{A}(v)(p) = \omega_{\sigma(p)}(\sigma_*(v)) \ ,$$

où $\sigma_*$ désigne l'application tangente à la section $\sigma$.

L'application $^{\sigma}\mathcal{A}$ ainsi définie, appelée **potentiel de jauge**, est une forme sur $M$ à valeurs dans $Lie(G)$.

Soient $(x^i)_i$ un système de coordonnées sur $M$ et $(X_\alpha)_\alpha$ une base de $Lie(G)$ Localement le potentiel de jauge $^{\sigma}\mathcal{A}$ s'écrit :

$$^{\sigma}\mathcal{A} = \mathcal{A}_i^{\alpha} X_\alpha dx^i \ .$$

Si $\tau$ désigne une autre section locale du fibré telle que $\tau(p) = \sigma(p)g(p)$, pour tout $p \in M$ avec $g : M \longrightarrow G$, on a formellement

$$^{\tau}\mathcal{A} = g^{-1} \ ^{\sigma}\mathcal{A} g + g^{-1}dg \ .$$

Le potentiel de jauge, parfois appelé pull-back de la forme de connexion $\omega$, est interprêté par les physiciens comme :

- le potentiel électromagnétique si $G = U(1)$
- le potentiel chromodynamique ou champ de gluons si $G = SU(3)$
- le potentiel du champ électro-faible ou champ de bosons si $G = SU(2) \times U(1)$.

En théorie gravitationnelle où $G$ désigne un groupe de changement de repère d'une variété de dimension $n$, comme $GL(n)$, on désigne les composantes du potentiel de jauge sous le nom de symboles de Christoffel.

## Connexions dans les fibrés vectoriels associés

### Matrice de connexion

Soient $P = P(M, G)$ un fibré principal, $E$ un fibré vectoriel associé via la représentation $\varrho$ sur un espace vectoriel $F$ de dimension $n$ et $\mathcal{A} = \mathcal{A}_i^\alpha X_\alpha dx^i$ le potentiel de jauge définissant une forme de connexion $\omega$ sur $P$.
Soit $(X_\alpha)_\alpha$ une base $Lie(G)$ et $\tilde{\varrho}$ la representation de $Lie(G)$ correspondant à $\varrho$.
Alors $\tilde{\varrho}(X_\alpha) = (\tilde{\varrho}(X_\alpha)_{\bar{j}}^{\bar{i}})$ une matrice $n \times n$ décrivant un endomorphisme de l'espace vectoriel $F$.
On appelle **matrice de connexion** l'image $\tilde{\varrho}(\mathcal{A})$ du potentiel de jauge $\mathcal{A}$ par $\tilde{\varrho}$.

$$\tilde{\varrho}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_i^\alpha \tilde{\varrho}(X_\alpha) dx^{\bar{i}} \ .$$

Les composantes de $\tilde{\varrho}(\mathcal{A})$ sont les quantités

$$\tilde{\varrho}(\mathcal{A})_{\bar{j}}^{\bar{i}} = \mathcal{A}^\alpha (\tilde{\varrho}(X_\alpha)_{\bar{j}}^{\bar{i}}) \ \text{ avec } \ \mathcal{A}^\alpha = \mathcal{A}_i^\alpha dx^i \ .$$

Les éléments de matrice $\tilde{\varrho}(\mathcal{A})_{\bar{j}}^{\bar{i}}$ sont des 1-formes sur $M$, et on a

$$\tilde{\varrho}(\mathcal{A})_{\bar{j}}^{\bar{i}} = \tilde{\varrho}(\mathcal{A})_{\bar{j}k}^{\bar{i}} dx^k \ .$$

Les nombres $\tilde{\varrho}(\mathcal{A})_{\bar{j}k}^{\bar{i}}$ sont appelés coefficients de connexion.

### Différentielle covariante

La différentielle covariante

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M, E) = \Gamma(E) \otimes \Omega^1(M)$$

transforme les sections de $E$ en 1-formes sur $M$ à valeurs dans $\Gamma(E)$ et, pour toute section $\sigma$ de $E$ et toute fonction $f$ sur $M$, on a

$$\nabla(\sigma f) = (\nabla \sigma) f + \sigma \otimes df \ .$$

Soient $p \in M$ et, $e_1, \cdots, e_n$, $n$ sections indépendantes de $E$ dans un voisinage de $p$ ; la familles $(e_1(p), \cdots, e_n(p))$ constituant donc une base de l'espace vectioriel $E_p \approx F$.
Posons

$$\nabla e_{\bar{i}} = \tilde{\varrho}(\mathcal{A})_{\bar{i}}^{\bar{j}} e_{\bar{j}} \ .$$

Pour toute section $\sigma = \sigma^{\bar{i}} e_{\bar{i}}$ on a

$$\nabla\sigma = (\tilde{\varrho}(\mathcal{A})^{\bar{j}}_{\bar{i}}\sigma^{\bar{i}} + d\sigma^{\bar{j}})e_{\bar{j}} = (\tilde{\varrho}(\mathcal{A})^{\bar{j}}_{\bar{i}k}\sigma^{\bar{i}} + \partial_k\sigma^{\bar{j}})e_{\bar{j}}dx^k \ .$$

Une section est dite parallèle (ou transportée par parallélisme) si

$$\nabla\sigma = 0 \ .$$

Puisque $\nabla\sigma \in \Gamma(E)\otimes\Omega^1(M)$ on peut l'évaluer sur les vecteurs tangents à la variété de base $M$.
Soit $X = X^k\partial_k \in TM$. La section $(\nabla\sigma)(X) \in \Gamma(E)$ est appelée **dérivée covariante** de la section $\sigma$ dans la direction du champ de vecteurs $X$ et notée $\nabla_X\sigma$. On a

$$\nabla_X\sigma = (\tilde{\varrho}(\mathcal{A})^{\bar{j}}_{\bar{i}k}\sigma^{\bar{i}} + \partial_k\sigma^{\bar{j}})X^k e_{\bar{j}} \ .$$

Aussi

$$\nabla(\sigma\otimes\beta) = (\nabla\sigma)\otimes\beta + \sigma\otimes(\nabla\beta) \ , \ \forall\ \sigma,\beta \in \Gamma(E)$$

et

$$\nabla_X(\sigma\otimes\beta) = (\nabla_X\sigma)\otimes\beta + \sigma\otimes(\nabla_X\beta) \ , \ \forall\ \sigma,\beta \in \Gamma(E) \ , \ X \in TM \ .$$

L'opérateur $\nabla : TM\times\Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ défini par $\nabla(X,\sigma) = \nabla_X\sigma$ est $C^\infty(M)$-linéaire par rapport à la première variable $X$ et vérifie la règle de Leibniz par rapport à la deuxième variable.

Considérons le fibré dual $E^*$ de $E$. Notons $(e^1(p),\cdots,e^n(p))$ la base duale de la base $(e_1(p),\cdots,e_n(p))$ de $E_p$, $p \in M$.
La dérivation covariante des sections du fibré dual $E^*$ est définie par la relation

$$\nabla e^{\bar{i}} = -\mathcal{A}^{\bar{i}}_{\bar{j}} e^{\bar{j}} \ .$$

**Différentielle extérieure covariante**
Soient $E = E(M,F)$ un fibré vectoriel et $\nabla$ la différentielle covariante sur $E$.
La **différentielle extérieure covariante** est l'opérateur
$d^\nabla : \Gamma(E)\otimes\Omega^k(M) \longrightarrow \Gamma(E)\otimes\Omega^{k+1}$ vérifiant la propriété

$$d^\nabla(\psi\wedge\lambda) = d^\nabla\psi\wedge\lambda + (-1)^k\psi\wedge d\lambda \ , \ \psi \in \Omega^k(M) \ , \ \lambda \in \Omega^l(M) \ .$$

$d^\nabla$ est l'unique opérateur prolongeant $\nabla$ comme dérivation graduée de l'algèbre $\oplus_p E \otimes \Omega^p(M)$.

Par exemple si $u \in \Omega^1(M, E)$ et $v_1, v_2 \in TM$, alors

$$d^\nabla u(v_1, v_2) = \nabla_{v_1} u(v_2) - \nabla_{v_2} u(v_1) - u([v_1, v_2]) \ .$$

## Courbure

Soient $P = P(M, G)$ un fibré principal et $\omega$ une forme de connexion sur $P$. La 2-forme de courbure $\Omega$ sur $P$ est définie comme la dérivée covariante de $\omega$ ; ie

$$\Omega = D\omega \ ,$$

avec $d^\nabla \omega = (D\omega^i)e_i$ si $\omega = \omega^i e_i$, avec $\omega^i \in \Omega^1(P)$.

A partir de la définition de $D$ on a , pour tous champs de vecteurs $X, Y \in TP$,

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] \ ,$$

qui s'écrit formellement

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega \ .$$

Soit $\sigma$ une section locale sur $P$. On sait que la donnée d'une telle section a permi d'associer à la 1-forme de connexion $\omega$ (qui est une forme sur $P$) le potentiel de jauge $\mathcal{A}$ qui est une 1-forme sur la base $M$. Nous allons de la même manière associer à la courbure $\Omega$ (qui est une 2-forme sur $P$), via la section locale $\sigma$, une 2-forme $\mathcal{F}$ sur $M$ comme étant le "pull-back" de $\Omega$ par $\sigma$ ; soit :

$$\mathcal{F} = \sigma^* \Omega \ .$$

En terme de potentiel de jauge , on a

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \ .$$

Pour tous champs de vecteurs $X, Y \in TM$ définis sur le domaine de $\sigma$,

$$\mathcal{F}(X, Y) = \Omega(\sigma_* X, \sigma_* Y) = d\mathcal{A}(X, Y) + [\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)] \ .$$

Soient $(X_\alpha)_\alpha$ une base de $Lie(G)$ et $(e_i)_i$ un repère mobile de $TM$.
Alors, pour $i, j = 1, \cdots, \dim M$, $\mathcal{F}_{ij} = \mathcal{F}(\partial_i, \partial_j)$ est une 1-forme sur $M$ à valeurs dans $Lie(G)$, et on a donc

$$\mathcal{F}_{ij} = \mathcal{F}_{ij}^\alpha X_\alpha \text{ avec } \mathcal{F}_{ij}^\alpha \in \Omega^1(M) .$$

**Remarque**
Pour tout $g \in G$, $R_g^* \Omega = g^{-1} \Omega g$.

Considérons $(d^\nabla)^2 : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E) \otimes \Omega^2(M)$.
L'opérateur $(d^\nabla)^2$ est $C^\infty(M)$ linéaire et on a

$$(d^\nabla)^2 = \mathcal{F} .$$

A partir de la relation ci-dessus, on obtient **l'équation de structure** pour la courbure $\mathcal{F}$ :

$$\mathcal{F}_{ij} = [\nabla_{e_i}, \nabla_{e_j}] - \nabla_{[e_i, e_j]} .$$

En utilisant la définition de $\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$, du fait que $d^2 = 0$ et de l'associativité du produit extérieur $\wedge$, on obtient la relation

$$d\mathcal{F} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{F} = \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} ,$$

connue sous le nom de **l'identité de Bianchi** pour la courbure ou deuxième identité de Bianchi.
Si le groupe structural est abélien, l'identité de Bianchi s'écrit simplement

$$d\mathcal{F} = 0 .$$

Si $\tau$ et $\sigma$ sont deux jauges du fibré $P$, on a la formule de **transformation de jauge** pour la courbure qui s'écrit :

$${}^\tau\mathcal{F} = g^{-1}\, {}^\sigma\mathcal{F} g .$$

avec $\tau(p) = \sigma(p) g(p)$ , $\forall\, p \in M$.

## Cas des connexions linéaires

Une connexion est dite linéaire si elle est définie dans le fibré des repères linéaires au-dessus d'une variété différentiable $M$. Dans ce cas les indices de fibre et les indices de base peuvent coincider, nous donnant ainsi la possibilité de contracter un indice de fibre avec un indice de base.
On note généralement dans ce cas le potentiel de jauge par $\Gamma$ et la courbure par $R$.
Si $(e_i)_i$ est un repère mobile de $TM$ de co-repère dual $(e^j)_j$, on a

$$\nabla e_i = \Gamma_{ij}^k e_k \otimes e^j \ , \ \nabla_{e_j} e_i = \Gamma_{ij}^k e_k \ \text{ et } \ \nabla e^k = \Gamma_{ij}^k e^i \otimes e^j \ ,$$

où les nombres $\Gamma_{ij}^k$ sont les coefficients de connexion, appelés **symboles de Christoffel**.

La courbure $R$ s'écrit

$$R = R_k^l e_l \wedge e^k \ \text{ avec } \ R_k^l \in \Omega^2(M) \ .$$

Puisque les $R_k^l$ sont des 2-formes sur $M$, on a

$$R_k^l = R_{kij}^l e^i \wedge e^j \ \text{ avec } \ R_{kij}^l \in C^\infty(M) \ .$$

Les fonctions $R_{kij}^l$ sont les composantes d'un tenseur sur $M$ appelé **tenseur de courbure de Riemann** et noté encore $R$.
A partir de l'équation de strucuture $R(e_i, e_j) = [\nabla_i, \nabla_j] - \nabla_{[e_j, e_j]}$, on établit que

$$\begin{aligned} R_{kij}^l &= \ < e^l \ , \ R(e_i, e_j) e_k > \\ &= \ (\Gamma_{kj,i}^l - \Gamma_{ki,j}^l) + \Gamma_{\mu i}^l \Gamma_{kj}^\mu - (\Gamma_{\mu j}^l \Gamma_{ki}^\mu - \Gamma_{k\mu}^l C_{ij}^\mu) \ . \end{aligned}$$

où les nombres $C_{ij}^\mu$ définis par $[e_i, e_j] = C_{ij}^\mu e_\mu$ sont les constantes de structure. qui sont nulles si $(e_i)_i$ est un repère naturel.

## Torsion

Soit $P = P(M,G)$ le fibré principal des repères au-dessus d'une variété différentiable $M$ de dimension $m$.
Notons $\theta$ la 1-forme sur $P$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ qui, à tout vecteur $X$ tangent à $P$ en un point $z \in P$, associe les coordonnées du vecteur $\pi_*(X) \in T_{\pi(z)}M$ relativement au repère $z$.
La 1-forme $\theta$, appelée **forme canonique**, est équivariante et induit une 1-forme sur $M$, encore notée $\theta$, à valeurs dans $TM$.

La torsion induite par la connexion sur $P$ est la 2-forme $T$ sur $M$ à valeurs dans $TM$ définie par

$$T = d^\nabla \theta \in \Omega^2(M, TM) \ .$$

Dans un repère mobile $(e_i)_i$, on a la relation

$$T(e_i, e_j) \equiv T_{ij} = \nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i - [e_i, e_j]$$

qui est l'équation de structure pour la torsion.
En posant $T_{ij} = T_{ij}^k e_k$, on a

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k - C_{ij}^k \ .$$

**Remarque**
La torsion est antisymétrique et elle est nulle si, dans un repère naturel, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

## Le tenseur de Ricci

En contractant un indice de fibre et un indice de base du tenseur de courbure de Riemannian $R = R_{kij}^l e_l \wedge e^k \wedge e^i \wedge e^j$, on obtient un 2-tenseur covariant $\rho$, appelé **tenseur de Ricci**, qui est donc défini par :

$$\rho_{ij} = R_{ikj}^k \ .$$

Comme on peut le constater, le tenseur de Ricci est symétrique.

## Courbes autoparallèles

Un champ de vecteurs $X = X^i e_i \in TM$ est dit parallèle le long d'une courbe $\gamma : t \in \mathbb{R} \longmapsto \gamma(t) \in M$, si sa dérivée covariante dans la direction du vecteur tangent $\dot\gamma(t) = \frac{d\gamma}{dt}$ à la coube $\gamma$ est nulle. Soit

$$\nabla_{\dot\gamma(t)} X = \frac{dX^k}{dt} + \Gamma^k_{ij} X^i \dot\gamma^j(t) = 0 \;.$$

La courbe $\gamma$ est dite autoparallèle si

$$\nabla_{\dot\gamma(t)} \dot\gamma(t) = \frac{d^2\gamma^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij} \dot\gamma^i(t) \dot\gamma^j(t) = 0 \;.$$

# Bibliographie


[1] R. Coquereaux, A. Jadczyk, *Fiber bundles, Kaluza Klein theories and all that*, World Scientific, 1988.

[2] J. Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis*, 5. Ed., Spinger-Verlag,Berlin, Heidelberg, 2008.

[3] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Vol II-III. Interscience, 1963.

[4] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, 2. Ed., IoP Bristol and Philadelphia, 2003.