

KATO INEQUALITIES AND APPLICATIONS

Guy DEGLA
IMSP, Porto-Novo, Bénin

In honour of the 60th Birthday of the Distinguished Professor A. BANYAGA.

Cet exposé est consacré à l'énoncé de l'inégalité de Kato sous sa version générale due à T. Horiuchi concernant les opérateurs p -harmoniques (p -Laplacien).

Une application élémentaire de l'inégalité de Kato permet de se rendre compte que tout opérateur de Schrödinger $H = -\Delta + V$ avec un potentiel positif et assez régulière V , est essentiellement auto-adjoint (i.e. la fermeture \bar{H} auto-adjointe) sur l'ensemble des fonctions de classe C^∞ à supports compacts.

Par ailleurs l'inégalité de Kato permet quelques fois d'avoir des propriétés qualitatives (bornes a priori) des solutions d'une équation elliptique linéaire ou non grâce à l'inégalité variationnelle qu'elle implique pour les valeurs absolues de ces solutions.

De plus les diverses versions plus ou moins raffinées de l'inégalité de Kato sont très utiles en Géométrie Riemannienne (notamment, dans des estimations sous-elliptiques, la démonstration du théorème de Hijazi et dans l'établissement de certaines propriétés particulières des métriques d'Einstein).

Cette inégalité peut se démontrer en faisant une approximation régulière de la fonction module (ou valeur absolue) et en se servant des suites de fonctions régularisantes qui sont standard en théorie de distribution.

Théorème 1. (Kato)

Soit N un entier naturel non nul, $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ et supposons que l'on ait au sens des distributions $\Delta u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Alors

$$\Delta|u| \geq \Re[(\text{sgn } u)\Delta u] \quad \text{au sens des distributions.}$$

De même, étant donné un domaine non vide Ω de \mathbb{R}^N et E un opérateur différentiel linéaire

du second ordre et uniformément elliptique, si $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ est une fonction réelle

telle que $E(u) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ au sens des distributions, alors

$$E(|u|) \geq (\text{sgn } u)E(u) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Soit N un entier naturel non nul, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine non vide et $p > 1$ un nombre réel.

Considérons le p -Laplacien

$$L_p u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

et posons

$$\mathcal{K}_p = \{u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) : \partial_i u, \partial_{ij}^2 u \in L^{p_o}_{\text{loc}}(\Omega) \text{ et } |\nabla u|^{p-2} \partial_{ij}^2 u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \text{ pour } i, j = 1, 2, \dots, N\}$$

où $p_o = \max\{p-1, p\}$.

Nous avons alors la généralisation suivante de l'inégalité de Kato.

Théorème 2. (Horiuchi)

Si $u \in \mathcal{K}_p$, alors $L_p |u| \geq (\operatorname{sgn} u) L_p u$ au sens des distributions.

Proposition.

Soit N un entier naturel non nul et $V \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ telle $V \geq 0$ presque partout.

Alors l'opérateur de Schrödinger $T = -\Delta + V$ est essentiellement auto-adjoint sur $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Preuve: On a $D(T) = D(\Delta) \cap D(V)$ avec $D(\Delta) = H^2(\mathbb{R}^N)$ et

$$D(V) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^N) : \int |Vf|^2 < \infty \right\}.$$

Observons que $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset D(T)$ ce qui implique que l'opérateur T est à

domaine dense dans $H^2(\mathbb{R}^N)$. On montre sans grande difficulté que tout opérateur A

symétrique et positif à domaine

dense dans un espace de Hilbert est auto-adjoint si et seulement si $\ker(A^* + I) = \{0\}$.

Pour ce faire, il suffit ici de montrer que $\ker(T^* + I) = \{0\}$.