

UNIVERSITÉ D'ABOMEY-CALAVI (UAC), BENIN
 The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (ICTP),
 Trieste, Italy
Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP), Porto-Novo, Bénin
Geo-Net VI
 Mercredi 13 juin 2007

MÉTRIQUES g -NATURELLES SUR LE FIBRÉ TANGENT D'UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE (M, g)

PRÉSENTÉ PAR SERGE DEGLA

1. INTRODUCTION

Le fibré tangent sert d'espace de modélisation pour plusieurs phénomènes physiques par exemple en cosmologie et en mécanique, ce qui nécessite souvent le choix de métriques appropriées sur cet espace. Aussi la recherche de certaines propriétés sur les sections du fibré tangent peut-elle conduire à la construction de certaines métriques sur le fibré tangent. C'est le cas des métriques de type Cheeger-Gromoll qui ont permis aux auteurs de [BLW] d'établir une certaine mesure de coïncidence entre la notion de section parallèle sur les fibrés vectoriels riemanniens et celle d'harmonicité relativement à ces métriques. Le plus souvent si (M, g) est une variété riemannienne, alors la métrique de Sasaki est la métrique dont on munit le plus souvent le fibré tangent TM , et cette métrique ne dépend que de la structure riemannienne de M . En utilisant le concept d'opérateurs naturels O. Kowalski et M. Sekizawa, ont construit en fonction de la métrique de base sur M , d'autres métriques plus générales sur TM , [K-S]. Ils ont donné une classification complète pour ces métriques dans le cas où la variété de base est orientée. Il y a eu d'autres résultats sur les métriques définies par Kowalski et Sekizawa, par exemple Mohamed Abbassi et Maati Sarih ont désigné ces métriques par métriques g -naturelles et ont établi des propriétés d'hérédité pour ces métriques [kAmS]. On essaye d'étudier ces propriétés et d'établir dans quelle mesure leurs réciproques peuvent être réalisées.

2. PRÉLIMINAIRES

Soit M une variété différentielle. On considère le fibré tangent TM de M donné par

$$TM = \{(p, u) / p \in M, u \in T_p M\};$$

puis la projection naturelle de TM , $\Pi : TM \longrightarrow M$
 $(p, u) \longmapsto p$

Soit M une variété différentielle de dimension m avec un atlas \mathcal{A} , C^∞ . Pour chaque carte locale $x : U \longrightarrow R^m$ dans \mathcal{A} , on définit

$$x^* : \begin{array}{ccc} \Pi^{-1}(U) & \longrightarrow & R^m \times R^m \\ (p, \sum_{k=1}^m u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_p) & \longmapsto & (x(p), (u_1, \dots, u_m)) \end{array}$$

Alors la collection $\{(x^*)^{-1}(W) \subset TM / (U, x) \in \mathcal{A} \text{ et } W(\text{ouvert}) \subset x(U) \subset R^m\}$ est une base topologique sur TM et $(\Pi^{-1}(U), x^*)$ est une carte locale de TM .

Soit un système de coordonnées locales $\{(U; x^i, i = 1, 2, \dots, m)\}$ de M et $\{(p^{-1}(U); x^i, u^i, i = 1, \dots, m)\}$ le système de coordonnées qu'il induit sur TM . Soit $X = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ une expression locale dans U d'un champ de vecteurs X dans M . Alors le relèvement horizontal X^h et le relèvement vertical X^v de X , relativement à $(p^{-1}(U))$ sont donnés par

$$(1) \quad X_{(x^i, u^i)}^h = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum_{i,j,k} \Gamma_{jk}^i u^j X^k \frac{\partial}{\partial u^i}$$

$$(2) \quad X_{(x^i, u^i)}^v = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

où les (Γ_{jk}^i) désigne les symboles de Christoffel de g .

$H_{(p,u)} = \{X_{(p,u)}^h, X \in T_p M\}$ est appelé le sous-espace horizontal de $T_{(p,u)} TM$ au point (p, u) et $V_{(p,u)} = \{X_{(p,u)}^v, X \in T_p M\}$ est appelé le sous-espace vertical de $T_{(p,u)} TM$ au point (p, u) ; puis on a

$$T_{(p,u)} TM = H_{(p,u)} \oplus V_{(p,u)}$$

3. MÉTRIQUE G-NATURELLE

Définition 3.0.1. Soit (M, g) une variété riemannienne. On désigne par métrique g -naturelle toute métrique G sur TM induite par g à partir d'un opérateur naturel de premier ordre $S_+^2 T^* \rightsquigarrow (S^2 T^*)T$.

On a la proposition suivante

Proposition 3.0.2. [A-S] Soit (M, g) une variété riemannienne et G une métrique g -naturelle sur TM . Alors il existe des fonctions C^∞ $\alpha_i, \beta_i : R^+ \rightarrow R$; $i = 1, 2, 3$ telle que pour $u, X, Y \in T_x M, x \in M$, on a

$$(3) \quad G_{(x,u)}(X^h, Y^h) = (\alpha_1 + \alpha_3)(r^2)g_x(X, Y)$$

$$(4) \quad +(\beta_1 + \beta_3)(r^2)g_x(X, u)g_x(Y, u)$$

$$G_{(x,u)}(X^h, Y^v) = (\alpha_2)(r^2)g_x(X, Y) + (\beta_2)(r^2)g_x(X, u)g_x(Y, u)$$

$$G_{(x,u)}(X^v, Y^h) = (\alpha_2)(r^2)g_x(X, Y) + (\beta_2)(r^2)g_x(X, u)g_x(Y, u)$$

$$G_{(x,u)}(X^v, Y^v) = (\alpha_1)(r^2)g_x(X, Y) + (\beta_1)(r^2)g_x(X, u)g_x(Y, u)$$

où $r^2 = g_x(u, u)$.

Pour $m = 1$ on a le même résultat avec $\beta_i = 0, i = 1, 2, 3$.

Notation 3.0.3. Dans la suite nous allons utiliser les notations suivantes:

- $\phi_i(t) = \alpha_i(t) + t\beta_i(t)$,
- $\alpha_1(t)(\alpha_1 + \alpha_3)(t) - \alpha_2^2(t)$,
- $\phi_1(t)(\phi_1 + \phi_3)(t) - \phi_2^2(t)$,

pour $t \in R^+$

Les métriques g -naturelles riemanniennes sont caractérisées comme ci-après:

Proposition 3.0.4. [A-S] Une métrique g -naturelle G sur le fibré tangent d'une variété riemannienne (M, g) , est riemannienne si et seulement si les fonctions de la proposition 3.0.2, définissant G , vérifie les inégalités suivantes

$$\begin{cases} \alpha_1(t) > 0, & \phi_1(t) > 0 \\ \alpha(t) > 0, & \phi(t) > 0 \end{cases} \text{ cc}$$

pour tout $t \in R^+$.

Pour $m = 1$ le système se réduit à $\alpha_1(t) > 0$ et $\alpha(t) > 0$, pour tout $t \in R^+$.

Conventions Importantes.

- (1) Dans la suite, si on considère une métrique g -naturelle G sur TM , on va supposer implicitement qu'elle est définie par les fonctions $\alpha_i, \beta_i : R^+ \rightarrow R$, $i = 1, 2, 3$ donnée dans la proposition 3.0.2 et vérifiant le système de la proposition 3.0.3 .
- (2) Si il n'y a pas de spécification particulière, toutes les fonctions numériques $\alpha_i, \beta_i, \phi_i, \alpha$, et ϕ donnée dans la proposition 3.0.2 et leurs dérivées sont évaluées en $r^2 := g_x(u, u)$.

Dans [A-S], M. Abbassi et M. Sarih ont la connection de Levi-Civita $\bar{\nabla}$ d'une métrique g -naturelle quelconque sur TM . En effet ils ont établi la proposition suivante:

Proposition 3.0.5. [kAmS] *Dans [A-S], M. Abbassi et M. Sarih ont déterminé la courbure de la connection de Levi-Civita $\bar{\nabla}$ d'une métrique g -naturelle riemannienne TM en fonction de celle de g . Par exemple, ils ont établi les égalités suivantes:*

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \bar{R}(X^h, Y^h) Z^h &= [R(X, Y)Z]^h + h\{(\nabla_X A_u)(Y, Z) - (\nabla_Y A_u)(X, Z) \\
 &+ A(u; X, A(u; Y, Z)) - A(u; Y, A(u; X, Z)) + C(u; X, B(u; Y, Z))\} \\
 &- C(u; Y, B(u; X, Z)) + C(u; Z, R(X, Y)u) + v\{(\nabla_X B_u)(Y, Z) \\
 &- (\nabla_Y D_u)(X, Z) + B(u; Y, A(u; Y, Z)) - B(u; Y, A(u; X, Z)) \\
 &+ D(u; X, B(u; Y, Z)) - D(u; Y, B(u; X, Z)) + D(u; Z, R(X, Y)u)\}, \\
 (6) \quad \bar{R}(X^h, Y^h) Z^v &= [R(X, Y)Z]^v + h\{(\nabla_X C_u)(Y, Z) - (\nabla_Y C_u)(X, Z) \\
 &+ A(u; X, C(u; Y, Z)) - A(u; Y, C(u; X, Z)) + C(u; X, D(u; Y, Z)) \\
 &- C(u; Y, D(u; X, Z)) + E(u; R(X, Y)u, Z)\} + v\{(\nabla_X D_u)(Y, Z) \\
 &- (\nabla_Y D_u)(X, Z) + B(u; X, C(u; Y, Z)) - B(u; Y, C(u; X, Z)) \\
 &+ D(u; X, D(u; Y, Z)) - D(u; Y, D(u; X, Z)) + F(u; R(X, Y)u, Z)\},
 \end{aligned}$$

Les A, B, C, D, E, F étant des F -tenseurs i.e si on désigne par \oplus le produit fibré des variétés fibrées, alors les F -tenseurs de type (r, s) sont les applications

$$\mathcal{P} : TM \oplus \underbrace{TM \oplus \dots \oplus TM}_s \text{ fois} \rightarrow \bigsqcup_{x \in M} \oplus^r T_x M$$

qui sont linéaires pour les s derniers arguments telles que $\pi_2 \circ \mathcal{A} = \pi_1$, où π_1 et π_2 désignent respectivement les projections de l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de \mathcal{P} .

Abbassi et M. Sarih ont démontré les propriétés suivantes qu'ils ont appelé propriété d'hérité du fibré tangent (TM, G)

Théorème 3.0.6. *Si (TM, G) est localement symétrique, alors (M, g) est aussi localement symétrique.*

Pour les variétés d'Einstein on a:

Théorème 3.0.7. [kAmS] *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension $m \geq 3$ et G une métrique g -naturelle riemannienne sur TM . Si (TM, G) est une variété est une variété d'Einstein, alors (M, g) est aussi une variété d'Einstein.*

Le théorème suivant concerne la courbure scalaire et la courbure sectionnelle:

Théorème 3.0.8. [kAmS] *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension $m \geq 3$ et G une métrique g -naturelle riemannienne sur TM . Si (TM, G) est à courbure sectionnelle constante (ou à courbure scalaire constante, respectivement) alors (M, g) possède la même propriété.*

Indication pour la preuve:

Pour la courbure sectionnelle on a :

$$(7) \quad \bar{R}_{(x,u)}(X^h, Y^h) Z^h = K(G_{(x,u)}(Y^h, Z^h) X^h - G_{(x,u)}(X^h, Z^h) Y^h),$$

pour tout $X, Y, Z \in \chi(M)$ et $(x, u) \in TM$. Si on prend $u = 0$ dans l'identité 7 on obtient

$$(8) \quad \bar{R}_{(x,0)}(X^h, Y^h) Z^h = K(\alpha_1 + \alpha_3)(0)(g_x(Y, Z)X_{(x,0)}^h - g_x(X, Z)Y_{(x,0)}^h)$$

En substituant (5) dans (8) on déduit que

$$(9) \quad [R(X, Y) Z]_{(x,0)}^h = [K(\alpha_1 + \alpha_3)(0)(g_x(Y, Z)X_{(x,0)}^h - g_x(X, Z)Y_{(x,0)}^h)]_{(x,0)}^h$$

D'où

$$(10) \quad R(X, Y) Z = K(\alpha_1 + \alpha_3)(0)(g_x(Y, Z)X_{(x,0)} - g_x(X, Z)Y_{(x,0)})]$$

pour tout $X, Y, Z \in \chi(M)$ et $x \in M$, ce qui montre que (M, g) est une variété à courbure sectionnelle constante $K(\alpha_1 + \alpha_3)(0)$.

Ainsi Abbasi et Sarih ont montré que si G est à courbure sectionnelle constante, alors g est aussi à courbure sectionnelle constante, mais plus précisément on a pu montrer que la courbure de g est nécessairement nulle.

En effet, ayant supposé que G est à courbure sectionnelle constante K , la composante verticale de l'identité (6) est alors nulle, ce qui donne

$$(11) \quad R(X, Y)Z = -\{(\nabla_X D_u)(Y, Z) - (\nabla_Y D_u)(X, Z) + B(u; X, C(u; Y, Z)) - B(u; Y, C(u; X, Z)) + D(u; X, D(u; Y, Z)) - D(u; Y, D(u; X, Z)) + F(u; R(X, Y)u, Z)\},$$

$\forall X, Y, Z, u$. Ainsi pour $u = 0$, on a bien $R \equiv 0$.

square En conséquence

Proposition 3.0.9. *Soit (M, g) est une variété riemannienne et G une métrique g -naturelle. Si (M, g) n'est pas plate alors (TM, G) n'est pas une forme d'espace.*

Ensuite, on a pu établir les propositions suivantes

Proposition 3.0.10. *Soit (M, g) variété riemannienne et G une métrique g -naturelle. Alors (TM, G) est une forme d'espace si et seulement (TM, G) est plate.*

et

Proposition 3.0.11. *Si (M, g) est plate alors une métrique riemannienne g -naturelle G définie par les fonctions α_i et β_i $i = 1, 2, 3$ dans (3.0.2) est plate si et seulement si*

- (i) $\alpha_1 + \alpha_3 = cste, \alpha_2 = cste, \beta_1 + \beta_3 = 0, \beta_2 = 0$
- (ii) $\alpha'_1(t) = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \alpha\beta_1(\alpha_1 + \alpha_3)}t}{(\alpha_1 + \alpha_3)t}$

$$\begin{aligned}
 \beta_1'(t) &= \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \alpha\beta_1(\alpha_1 + \alpha_3)t}}{\alpha t} \beta_1 \\
 \text{(iii)} \quad &+ \frac{\sqrt{\alpha\phi}}{2\alpha^2} \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \alpha\beta_1(\alpha_1 + \alpha_3)t}}{(\alpha_1 + \alpha_3)t} \right) \left(\frac{2\sqrt{\alpha^2 + \alpha\beta_1(\alpha_1 + \alpha_3)t} - 2\alpha - \beta_1(\alpha_1 + \alpha_3)t}{t} \right) \\
 &+ \frac{\sqrt{\alpha\phi}}{2\alpha^2} \left(\frac{-\alpha\beta_1(\alpha_1 + \alpha_3)t - 2(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \alpha\beta_1(\alpha_1 + \alpha_3)t})\sqrt{\alpha^2 + \alpha\beta_1(\alpha_1 + \alpha_3)t}}{(\alpha_1 + \alpha_3)t^2} \right) \\
 &+ \frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \alpha\beta_1(\alpha_1 + \alpha_3)t}}{(\alpha_1 + \alpha_3)t} \right)^2 (2\beta_1(\alpha_1 + \alpha_3)^2 t - 3(\alpha_1 + \alpha_3)\phi) \\
 \text{(iv)} \quad &2\alpha^3 + 2\alpha^2\beta_1 t - 4\alpha\beta_1^2(\alpha_1 + \alpha_3)t^2 \\
 &- [2\alpha^2 + 2\alpha\beta_1 t - \alpha\beta_1(\alpha_1 + \alpha_3)t + 4t^2\beta_1^2(\alpha_1 + \alpha_3)]\sqrt{\alpha^2 + \alpha\beta_1(\alpha_1 + \alpha_3)t} = 0 \quad \forall t > 0 \text{ et} \\
 &\beta_1(0) = 0 \text{ ou } (\alpha_1 + \alpha_3)(0) = \frac{28}{3}.
 \end{aligned}$$

Remarque 3.0.12. Si (M, g) est plate et $\beta_1 \equiv 0$, $\alpha_1 \equiv cste > 0$, $\alpha_3 \equiv cste$, $\beta_3 \equiv 0$, $\beta_2 \equiv 0$, $\alpha_2 \equiv cste$, avec la condition $\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_3) > \alpha_2^2$, alors (TM, G) est plate.

REFERENCES

- [A-S] KMT Abbassi, M Sarih : **On natural metrics on tangent bundles of riemannian manifolds.** Arch. Math (Brno), submitted for publication
- [BLW] M. Benyounès, E. Loubeau, M. Wood : **Harmonic sections of Riemannian vector bundles, and metrics of Cheeger-Gromoll type**
eprint arXiv:math/0602049
- [kAmS] KMT Abbassi, M Sarih : **On some hereditary properties of riemannian g-natural metrics on tangent bundles of riemannian manifolds.** Differential Geometry and its Application 22(2005)19-47.
- [K-S] O. Kowalski, M. Sekizawa: **Natural transformations of Riemannian metrics on manifolds to metrics on the tangent bundles—a classification.** Bull. Tokyo Gakugei Univ.(4)40(1988)1-19.
- [PD] P Dombroski : **On the geometry of the tangent bundle** J. Reine Angew. Math. 210(1962), 73-88.
- [SS] S Sasaki : **On the differential geometry of the tangent bundles of riemannian manifolds.** Tohoku Math. J. 10(1958), 338-3354.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES ET DE SCIENCES PHYSIQUES, 01 BP 613, PORTO-NOVO, BÉNIN
E-mail address: sdegla@imsp-uac.org