

Geonet VI  
En Hommage au Professeur **Augustin BANYAGA**  
Porto-Novo, Bénin du 10 au 17 Juin 2007

## **Les variétés d'Osserman et conformément d'Osserman**

Par

Abdoul Salam DIALLO <sup>1</sup>

UNIVERSITÉ D'ABOMEY-CALAVI

The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics

Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques

01 BP 613, Porto-Novo, Bénin

Unité de Recherche en Mathématiques et de Physiques Mathématique

---

<sup>1</sup>Email: [asalam@imsp-uac.org](mailto:asalam@imsp-uac.org),

Abdoul Salam DIALLO  
 UNIVERSITÉ D'ABOMEY-CALAVI  
 The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics  
 Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques  
 01 BP 613, Porto-Novo, Bénin  
 Unité de Recherche en Mathématiques et de Physiques Mathématique

### Abstract

Dans cette note, nous donnons une introduction générale sur les variétés d'Osserman et conformément d'Osserman.

## 1 Introduction

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne de dimension  $m$ . Soit  $R$  le tenseur de courbure de  $(M, g)$ . L'opérateur de Jacobi  $R_X$  est l'endomorphisme symétrique de l'espace tangent  $T_pM$  défini par  $R_X(Y) = R(Y, X)X$ , dont les valeurs propres permettent de comprendre la géométrie de  $(M, g)$ . Il existe cependant une classe très restreinte de variétés, appelées *variétés d'Osserman*, pour lesquelles les valeurs de l'opérateur de Jacobi sont constantes.

Les exemples de variétés d'Osserman connues sont les espaces symétriques de rang 1 et les espaces plats. L'étude des variétés d'Osserman a commencé au début des années 90 avec Peter Gilkey qui cherchait à résoudre la conjecture suivante dû à Robert Osserman:

*Conjecture [18]: Si les valeurs propres de l'opérateur de Jacobi  $R_X$  sont indépendantes du choix de  $X \in S_pM$  et du choix  $p \in M$ , alors soit  $M$  est un espace localement symétrique de rang 1 soit  $M$  est plat.*

Cette conjecture est le point de départ de cette théorie. Plusieurs chercheurs ont travaillé sur le sujet. Pour en avoir un aperçu sur la résolution de la conjecture, on consultera les remarquables travaux de Yuri Nikolayevski [14, 15, 16, 17]. Mais le développement de la théorie a aussi conduit à d'autres notions comme celle de *variétés conformément d'Osserman*.

L'objectif de ce présent exposé, outre de donner une introduction sur les variétés d'Osserman et conformément d'Osserman, mais de donner quelques résultats autour de cette théorie.

## 2 Prélimaires

Dans cette section, nous introduisons les notions de bases utilisées dans la suite du travail. Nous introduisons l'opérateur linéaire qui est au centre de ce travail: l'*opérateur de Jacobi* en mentionnant quelques unes de ses propriétés. L'objectif est d'étudier les valeurs propres de l'opérateur de Jacobi et la question est de savoir dans quelle mesure elles déterminent la géométrie de  $(M, g)$  ?

On considère une variété riemannienne  $(M, g)$  de dimension  $m$ . Soit  $\nabla$  la connexion de Levi-Civita de la métrique  $g$ ; elle est caractérisée par les identités:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0 \quad (1)$$

et

$$X.g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad (2)$$

pour tous champs de vecteurs  $X, Y$  et  $Z$ . L'identité 1 dit que  $\nabla$  est sans torsion et l'identité 2 dit que  $\nabla$  est compatible avec la métrique. L'opérateur de courbure associé et le tenseur de courbure sont donnés par:

$$R(X, Y) := \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]} \quad (3)$$

et

$$R(X, Y, Z, T) := g(R(X, Y)Z, T) \quad (4)$$

Cet opérateur est tensoriel, i.e, si  $f$  est une fonction sur  $M$ , alors

$$f.R(X, Y, Z, T) = R(fX, Y, Z, T) = R(X, fY, Z, T) = R(X, Y, fZ, T) = R(X, Y, Z, fT).$$

**Proposition 2.1.** *Le tenseur de courbure de Riemann vérifie les propriétés suivantes:*

$$R(X, Y, Z, T) = -R(Y, X, Z, T) = -R(X, Y, T, Z); \quad (5)$$

$$R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y); \quad (6)$$

$$R(X, Y, Z, T) + R(Y, Z, X, T) + R(Z, X, Y, T) = 0 \quad (7)$$

Cette proposition est un résultat classique que nous n'allons pas démontrer ici.

## 2.1 Tenseur de courbure algébrique

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $m$  munit d'une forme bilinéaire symétrique. Dans cette sous-section, nous allons établir quelques propriétés des tenseurs de courbure algébrique.

**Définition 2.1.** *Un tenseur  $A \in \otimes^4 V^*$  est dit tenseur de courbure algébrique si  $A$  satisfait les mêmes symétries que le tenseur de courbure d'une variété riemannienne  $(M, g)$ .*

Utilisant la théorie des coordonnées normales, Peter Gilkey [12] montra que tout tenseur de courbure algébrique est réalisable géométriquement. Plus précisément, il montra que pour tout tenseur de courbure algébrique  $A$  sur  $V$ ; il existe en tout point  $p \in M$  d'une variété riemannienne de dimension  $m$  une isométrie  $\phi : T_p M \rightarrow V$  telle que  $\phi^* A = R_p$  -i.e., pour tous vecteurs tangents  $X, Y, Z$  et  $T \in T_p M$ , nous avons:

$$A(\phi^* X, \phi^* Y, \phi^* Z, \phi^* T) = R(X, Y, Z, T)$$

pour tous vecteurs tangents  $X, Y, Z, T \in T_p M$ , et où  $R$  est le tenseur de courbure de  $(M, g)$ . Plus précisément:

**Théorème 2.1.** *(Peter Gilkey) [12] Soit  $A$  un tenseur de courbure algébrique sur  $V$ . Alors  $A$  est réalisable géométriquement.*

**Exemple 2.1.** *Soit  $\Phi$  une application auto-adjointe i.e.,  $(\Phi^* = \Phi)$  sur  $V$ , alors on montre que:*

$$A_\Phi(X, Y, Z, T) := (\Phi Y, Z)(\Phi X, T) - (\Phi X, Z)(\Phi Y, T) \quad (8)$$

*est un tenseur de courbure algébrique sur  $V$ .*

**Exemple 2.2.** *Soit  $\Psi$  une application anti-adjointe i.e.,  $\Psi^* = -\Psi$  sur  $V$ , de même on montre que:*

$$A_\Psi(X, Y, Z, T) := (\Psi Y, Z)(\Psi X, T) - (\Psi X, Z)(\Psi Y, T) - 2(\Psi X, Y)(\Psi Z, T) \quad (9)$$

*est un tenseur de courbure algébrique sur  $V$ .*

Notons par  $\mathcal{C}(V)$  l'espace des tenseurs de courbure algébrique sur  $V$ . De même

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(V) &= \text{Vect}\{A_\Phi | \Phi^* = \Phi\} \subseteq \mathcal{C}(V) \\ \mathcal{A}(V) &= \text{Vect}\{A_\Psi | \Psi^* = -\Psi\} \subseteq \mathcal{C}(V) \end{aligned}$$

désignerons respectivement l'espace des tenseurs de courbure algébrique auto-adjoint 2.1 et anti-adjoint 2.2. B. Fiedler [12] utilisa la théorie des représentations pour prouver le résultat suivant:

**Théorème 2.2.** *(B. Fiedler) [12] L'espace des tenseurs de courbure algébrique est un espace vectoriel. Il est engendré par les tenseurs de courbure algébriques  $\mathcal{S}(V)$  et  $\mathcal{A}(V)$ .*

**Corollaire 2.1.** Soit  $\mathcal{C}(V)$  l'espace des tenseurs de courbure algébrique sur  $\mathbb{R}^m$ . Alors:

$$\dim \mathcal{C}(V) = \frac{1}{12}m^2(m^2 - 1) \quad (10)$$

Pour  $m = 4$ , l'espace des tenseurs de courbure algébrique a 20 composantes. Il est donc naturel d'associer au tenseur de courbure algébrique  $A$  un opérateur linéaire et d'étudier les valeurs propres de cet opérateur pour comprendre la géométrie de  $A$ .

## 2.2 Opérateur de Jacobi

Soit  $R$  le tenseur de courbure d'une variété riemannienne  $M$  de dimension  $m$ . Nous allons lui associer un opérateur linéaire et étudier les conséquences géométriques si les valeurs propres de cet opérateur sont constantes.

Soit  $X \in T_pM$  et soit  $R_X : T_pM \longrightarrow T_pM$  l'application linéaire définie par:

$$R_X Y = R(Y, X)X$$

Par les identités de la courbure, on montre que  $R_X X = 0$  et  $g(R(Y, X)X, X) = 0$ , ainsi nous avons alors:

$$R(\cdot, X)X : X^\perp \longrightarrow X^\perp$$

où  $X^\perp$  est l'espace orthogonal à l'espace engendré par  $X$ .

**Définition 2.2.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne et soit  $X \in S(M, g)$  où  $S(M, g)$  est la sphère en fibré unité. La restriction de  $R_X : X^\perp \longrightarrow X^\perp$  de l'application  $R(\cdot, X)X$  à  $X^\perp$  est appelée opérateur de Jacobi

$$R_X Y = R(Y, X)X \quad (11)$$

pour tout  $Y \in X^\perp$

**Proposition 2.2.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne et soit  $X \in S(M, g)$ . L'opérateur de Jacobi est une application auto-adjointe.

*Preuve* Pour tout  $Y, Z \in X^\perp$  on a:

$$\begin{aligned} g(R_X Y, Z) &= g(R(Y, X)X, Z) \\ &= R(Y, X, X, Z) \\ &= R(Z, X, X, Y) \\ &= g(R(Z, X)X, Y) \end{aligned}$$

d'où  $g(R_X Y, Z) = g(Y, R_X Z)$ .  $\square$

**Remarque 2.1.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne,  $X \in S_p M$  et  $R_X$  l'opérateur de Jacobi associé. Alors nous notons que:

$$\begin{aligned} \text{Trace} R_X &= \sum_{i=1}^{n-1} g(R(e_i, X)X, e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} R(e_i, X, X, e_i) \\ &= \text{Ric}(X, X) \end{aligned}$$

où  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  est une base orthonormale de  $X^\perp$ . De même pour tout vecteur non nul  $Y \in X^\perp$ , considérons le plan  $P = \text{vect}\{Y, X\}$  dans  $T_p M$ , où  $X \in T_p M$ , alors la courbure sectionnelle notée  $k(P)$  de  $P$  est donnée par:

$$\begin{aligned} k(P) &= \frac{g(R(Y, X)X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \\ &= \frac{g(R_X Y, Y)}{g(Y, Y)g(X, X)} \end{aligned}$$

Les valeurs propres de  $R_X$  représentent les valeurs extrémales des courbures sectionnelles de tous les plans contenant  $Y$ .

**Remarque 2.2.** Le spectre de  $(M, g)$  est l'ensemble noté  $\text{Spect}\{R_X\}$  des réels tels qu'il existe  $Y \in T_p M$ , vérifiant  $R_X Y = \lambda Y$ . Le sous-espace de  $T_p M$  constitué des vecteurs propres associés à  $\lambda \in \text{Spect}\{R_X\}$  est appelé espace propre relatif à  $\lambda$ . C'est un espace vectoriel dont la dimension est la multiplicité de  $\lambda$ . Notons que la multiplicité de 0 est 1.

### 3 Variétés d'Osserman

**Définition 3.1.** Un tenseur de courbure  $R$  d'une variété riemannienne  $(M, g)$  est dit tenseur d'Osserman si les valeurs propres de l'opérateur de Jacobi (associé) sont constantes sur la sphère en fibré unité  $S(M, g)$ .

**Définition 3.2.** Une variété riemannienne  $(M, g)$  est dite d'Osserman en un point  $p \in M$ , si son tenseur de courbure  $R$  est d'Osserman en ce point  $p \in M$ .

Une variété riemannienne  $(M, g)$  est dite d'Osserman point par point, si son tenseur de courbure  $R$  est d'Osserman en chacun de ses points.

**Définition 3.3.** Une variété riemannienne  $(M, g)$  est dite globalement d'Osserman si les valeurs propres de l'opérateur de Jacobi  $R_X$  sont constantes pour tout vecteur unitaire  $X$  sur  $(M, g)$ .

**Proposition 3.1.** Toute variété riemannienne globalement d'Osserman est point par point d'Osserman.

Mais l'inverse n'est pas vraie voir ([13], où des exemples de variétés point par point d'Osserman de dimension 4 qui ne sont pas globalement d'Osserman sont données).

La relation entre les variétés point par point d'Osserman et globalement d'Osserman est donnée par le théorème suivant:

**Théorème 3.1.** [13] *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne point par point d'Osserman connexe telle que:*

1. *l'opérateur de Jacobi a seulement une valeur propre et  $\dim M \geq 3$ , où*
2. *l'opérateur de Jacobi a exactement deux valeurs propres distinctes, qui sont réelles avec leur multiplicités en tout  $p \in M$  et  $\dim > 4$ .*

*Alors  $(M, g)$  est globalement d'Osserman .*

Les exemples de variétés d'Osserman connues sont les espaces homogènes doublement transitives: l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , la sphère canonique  $\mathbb{S}^n$ , l'espace hyperbolique  $H^n$ , l'espace projectif réel  $\mathbb{R}P^n$ , l'espace projectif complexe  $\mathbb{C}P^n$  et son dual hyperbolique  $\mathbb{C}H^n$ , l'espace projectif quaternionien  $\mathbb{H}P^n$  et son dual hyperbolique  $\mathbb{H}H^n$ , le plan de Cayley  $\mathbb{C}aP^2$  et son dual hyperbolique  $\mathbb{C}aH^2$ .

**Proposition 3.2.** *Le tenseur de courbure d'un espace homogène doublement transitive est donné par:*

$$R(X, Y)Z = [Z, [X, Y]] \quad (12)$$

**Corollaire 3.1.** *Tout espace homogène doublement transitive est une variété d'Osserman.*

- Osserman [18] conjectura que l'inverse est vraie; i.e., *si les valeurs propres de  $R_X$  sont constantes, alors  $(M, g)$  est un espace plat, où un espace symétrique de rang 1;*
- D'importants travaux ont été réalisés pour résoudre cette conjecture, avec en particulier l'introduction des structures de Clifford. la conjecture est démontré pour les variétés de dimension  $\neq 16$  ; voir [11, 13, 14, 15, 16, 17] pour de détails.

## 4 Variétés conformément d'Osserman

Nous étudions dans cette section l'analogie conforme de la conjecture d'Osserman; i.e les valeurs propres de l'opérateur de Jacobi conforme associé à un tenseur de courbure conforme de Weyl sur le fibré tangent unité.

## 4.1 Tenseur de courbure de Weyl

Soit  $\{e_i\}$  une base orthonormale locale sur le fibré tangent. Le tenseur de Ricci  $\rho_R$  et la courbure scalaire associée  $\tau_R$  sont définis par

$$\rho_R(X, Y) := \sum_{ij} R(X, e_i, e_j, Y) \quad \text{et} \quad \tau_R := \sum_{ij} \rho_R(e_i, e_j) \quad (13)$$

Le tenseur de courbure de Riemann  $R$  se décompose en trois composantes irréductibles sous l'action du groupe orthogonal:.

$$R = U + Z + W \quad (14)$$

où

$U$  est la partie de  $R$  à courbure sectionnelle constante

$$U = \frac{\tau_R}{2m(m-1)}gg \quad (15)$$

$Z$  est la partie sans trace du tenseur de Ricci de  $R$ ; elle mesure la déviation de la métrique à être une métrique d'Einstein

$$Z = \frac{1}{m-2}(r - \frac{\tau_R}{m})g \quad (16)$$

$W$  apparait comme le reste après deux divisions successives de  $R$  par  $g$ . On l'appelle tenseur de weyl de  $R$ . De fait, on explicite, il est défini par

$$W(X, Y, Z, T) := R(X, Y, Z, T) + \frac{\tau_R}{(m-1)(m-2)}R_0(X, Y, Z, T) + \frac{1}{m-2}L(X, Y, Z, T) \quad (17)$$

avec

$$\begin{aligned} L(X, Y)Z &:= g(\rho_R Y, Z)X - g(\rho_R X, Z)Y + g(Y, Z)\rho_R X - g(X, Z)\rho_R Y \\ R_0(X, Y)Z &:= g(Y, Z)X - g(X, Z)Y \end{aligned} \quad (18)$$

On montre facilement que le tenseur de courbure de Weyl est un tenseur de courbure algébrique, i.e., il vérifie les symétries du tenseur de courbure de Riemann.

## 4.2 Opérateur de Jacobi conforme

L'opérateur de Jacobi conforme  $W_X$  est l'endomorphisme symétrique défini sur le fibré tangent par

$$W_X Y = W(Y, X)X \quad (19)$$

On étudie les valeurs propres de  $W_X$  restreint à la sphère en fibré unité  $S(M, g)$ .

**Proposition 4.1.** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne et soit  $X \in S(M, g)$ . L'opérateur de Jacobi conforme  $W_X : X^\perp \rightarrow X^\perp$  est une application auto-adjointe i.e.,  $g(W_X Y, T) = g(Y, W_X T)$ .*

**Remarque 4.1.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne,  $X \in S_p M$  et  $W_X$  l'opérateur de Jacobi conforme associé. Alors on montre que:

$$\text{Tr}\{W_X\} = 0$$

où  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  est une base orthonormale de  $X^\perp$ .

Deux métriques  $g_1$  and  $g_2$  sont dites *conformément équivalente* s'il existe une fonction scalaire positive  $\alpha \in C^\infty(M)$  telle que  $g_1 = \alpha g_2$ . Notons par  $[g]$  la classe conforme de la métrique  $g$ .

**Proposition 4.2.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne et soit  $X \in S(M, g)$ . L'opérateur de Jacobi conforme est un invariant conforme, i.e.,

$$W(g_1)_X = W(g_2)_X$$

### 4.3 Variétés conformément d'Osserman

**Définition 4.1.** On dit que  $W$  est conformément d'Osserman si les valeurs propres de l'opérateur de Jacobi conforme  $W_X$  sont constantes sur la sphère en fibré unité  $S(\cdot, g)M$ .

On dit que  $(M, g)$  est conformément d'Osserman si les valeurs propres de l'opérateur de Jacobi conforme  $W_X$  sont constantes sur la sphère en fibré unité  $S(M, g)$ .

Les exemples de variétés conformément d'Osserman standard connues sont les formes d'espaces conformes  $W = \lambda_0 R^0$  et les formes d'espaces conformément complexes  $W = \lambda_0 R^0 + \lambda_1 R^\phi$ . Voir [6] pour plus de détails.

**Proposition 4.3.** Toute variété d'Osserman et d'Einstein est conformément d'Osserman.

**Preuve 4.1.** A partir des égalités (7) et (9) on a:

$$\begin{aligned} g(W(Y, X)X, T) &= g(R(Y, X)X, T) + \frac{\tau_R}{(m-1)(m-2)} g(R_0(Y, X)X, T) \\ &+ \frac{1}{(m-2)} \left[ \rho_R(X, X)g(Y, T) - \rho_R(Y, X)g(X, T) + g(X, X)\rho_R(Y, T) \right. \\ &\left. - g(Y, X)\rho_R(X, T) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} g(W(Y, X)X, T) &= g(R(Y, X)X, T) + \frac{\tau_R}{(m-1)(m-2)} \left[ g(X, X)g(Y, T) - g(Y, X)g(X, Y) \right] \\ &+ \frac{1}{(m-2)} \left[ \rho_R(X, X)g(Y, T) - \rho_R(Y, X)g(X, T) + g(X, X)\rho_R(Y, T) \right. \\ &\left. - g(Y, X)\rho_R(X, T) \right] \end{aligned} \quad (21)$$

puisque  $(M, g)$  est d'Einstein, on a  $\rho_R(X, Y) = \lambda g(X, Y)$ ; alors

$$\begin{aligned}
g(W(Y, X)X, T) &= g(R(Y, X)X, T) + \frac{\tau_R}{(m-1)(m-2)} \left[ g(X, X)g(Y, T) - g(Y, X)g(X, Y) \right] \\
&+ \frac{1}{(m-2)} \left[ \lambda g(X, X)g(Y, T) - \lambda g(Y, X)g(X, T) + \lambda g(X, X)g(Y, T) \right. \\
&\left. - \lambda g(Y, X)g(X, T) \right] \\
&= g(R(Y, X)X, T) + \frac{\tau_R}{(m-1)(m-2)} \left[ g(X, X)g(Y, T) - g(Y, X)g(X, T) \right] \\
&+ \frac{1}{(m-2)} \left[ 2\lambda g(X, X)g(Y, T) - 2\lambda g(Y, X)g(X, T) \right] \\
&= g(R(Y, X)X, T) + \left\{ \frac{\tau_R}{(m-1)(m-2)} + \frac{2\lambda}{(m-2)} \right\} \left\{ g(X, X)g(Y, T) \right. \\
&\left. - g(Y, X)g(X, T) \right\}
\end{aligned} \tag{22}$$

on obtient

$$g(W(Y, X)X, T) = g(R(Y, X)X, T) + \alpha \{ g(X, X)g(Y, T) - g(Y, X)g(X, T) \} \tag{23}$$

L'opérateur de Jacobi conforme correspondant est donné par :

$$W_X Y = 0 \quad \text{si } X = Y \quad \text{et} \quad W_X Y = R_X Y + \alpha g(X, X)Y \quad \text{si } X \perp Y. \tag{24}$$

**Théorème 4.1.** Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux métriques conformément équivalentes. Alors  $(M, g_1)$  est conformément d'Osserman ssi  $(M, g_2)$  est conformément d'Osserman.

## References

- [1] J. Adams, *Vectors fields on spheres*, Annals of Math. 75 (1962), 603-632.
- [2] A. L. Besse *Einstein Manifolds* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, 10, Springer, Berlin, Heidelberg and New York, 1978
- [3] Novica Blazic, *Conformally Osserman Lorentzian Manifolds*, Kragujevac J. Math. 28(2005), 85-96.
- [4] N. Blazic, N. Bokan and P. Gilkey, *A note on Osserman Lorentzian Manifolds*, Bull. London Math Soc. 29(1997), 227-230.
- [5] N. Blazic, N. Bokan, P. Gilkey and Z. Rakic, *Pseudo-Riemannian Osserman manifolds* Balkan Soc. of Geometers, 2(1997), 1-12.
- [6] Novica Blazic and Peter Gilkey, *Conformally Osserman manifolds and conformally complex space forms*, math.DG/0311263.

- [7] Novica Blazic and Peter Gilkey, *Conformally Osserman manifolds and self-duality in Riemannian geometry*, math.DG/0504498.
- [8] N. Blazić, P. Gilkey, S. Nikčević and U. Simon, *The spectral geometry of the Weyl conformal tensor*, math.DG/0310226.
- [9] Q-S. Chi, *A curvature characterization of certain locally rank-one symmetric spaces*, J. Differential Geom., 28(1988), 187-202.
- [10] E. Garaia-Rio, D. N. Kupelli and R. Vasquez-Lorenzo *Osserman manifolds in semi-Riemannian* Lecture Notes in Mathematics 1777, Springer Verlag, Berlin(2002), ISBN 3-540-43144-6.
- [11] Peter B. Gilkey, *Manifolds whose curvature operator has constant eigenvalues at the basepoint*, J. Geom. Anal. 4(1994), 155-158.
- [12] Peter B. Gilkey, *Geometric properties of natural operators defined by the Riemannian curvature tensor* World Scientific Publishing, ISBN 981-02-4752-4
- [13] P. B. Gilkey, A. Swann and L. Vanhecke *Isoparametric geodesic spheres and a conjecture of Osserman concerning the Jacobi operator*, Quart. J. Math. Oxford. 46(1995), 299-320.
- [14] Y. Nikolayevski *Osserman conjecture in dimension  $n \neq 8, 16$* ; math.DG/0204258.
- [15] Y. Nikolayevski *Osserman manifolds of dimension 8*; math.DG/0310387.
- [16] Y. Nikolayevski *Osserman manifolds and Clifford structures*; Houston J. Math., 29(2003) 59-75
- [17] Y. Nikolayevski *On Osserman manifolds in dimension 16*; Proc. Conference Contemporary, Geometry and Related Topics, June 26-July 2, 2005, Belgrade, Matematički fakultet beograd (2006), 379-398
- [18] Robert Osserman, *Curvature in the eighties*, Amer. Math. Monthly, 97(1990), 731-756.
- [19] R. Osserman, P. Sarnak, *A new curvature invariant and entropy of the geodesic flows*, Invent. Math. 77(1984), 455-462
- [20] Z.Rakić *Duality principle in Osserman manifolds*, Linear Alg. Appl., 296 (1999), 183-189.
- [21] Catalin Sterbeti, *Higher order Osserman pseudo-Riemannian manifolds of neutral signature (2, 2)*, Balkan J. Geom. Appl., 10,(2005), 175-178.